2016 年 1 月 12 日 (2016 年 1 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 11

前回の補足

- 問題 10-1: ガウス曲率は $25a^4b^4c^4/(a^{10}+b^{10}+c^{10})^2$
- 問題 10-2: 0 (付録 B-6 参照)
- 問題 10-3: ワインガルテン行列 A が固有ベクトル ${}^t(1,0)$, ${}^t(0,1)$ をもつことを利用すればよい.
- 問題 10-4: p_u, p_v 方向の法曲率が 0 であることから結論が従う.
- 問題 10-5: たとえば，曲率線座標表示：$p(u,v)=(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,\sinh u)$,
  漸近線座標表示 $p(\xi,\eta)=\left(\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)},\frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)},\tan(x+y)\right)$.

授業に関する御意見

- 曲率線座標，漸近線座標の具体例を紹介してください（問 10-5 以外で）
  山田のコメント： テキストの例 B-8.6 は，(u,v) が曲率線座標，$u=s+t$, $v=s-t$ とパラメータ変換すると (s,t) が漸近線座標になっています.
- 毎回質問を募集し，回答して下さっている時点で学生想いだと感じます．今年もよろしくお願いします.
  山田のコメント： どーですかね/こちらこそ.
- 特にないです.　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 「$\dot\gamma=\dot u p_u+\dot v p_v$ だから $\dot\gamma$ は曲面に接する」というのがわかりませんでした．曲面に接するのは γ が曲面上の曲線であることから当然のような気がするのですが.

お答え： もちろん当然．ただし「曲面に接する」とはどういうことか，ということはきちんとおさえておいてください．p_u, p_v の線形結合で表されるベクトルが「曲面に接するベクトル」ですね．’

質問： ガウス曲率が 0 となる曲面は平面，円柱面，円錐面以外にありますか.　**お答え：**たくさん．テキスト付録 B-4.

質問： ロールは曲率 0 とおっしゃっていたのですが，もう一度説明をして頂けませんか?

お答え： ロール（講義では鉄板のロール）の曲面としてのガウス曲率は 0．これは，付録 B-4 の「柱面」の特別な場合.

質問： 曲面の臍点は図形的にどのような特徴がありますか.　**お答え：**すべての方向に，曲がり具合（法曲率）が一定.

質問： 10-3 についてですが，曲率線座標は $ds^2=E\,du^2+G\,dv^2$, $I\!I=L\,du^2+N\,du^2$ と表わされるので，$ds^2=(du,dv)\begin{pmatrix}E&0\\0&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$ などとして，対角行列となることを示せばよいのですか? 間違っていたら解説をお願い致します.

お答え： 間違っています．第一基本行列，第二基本行列の定義から，ご質問の式が成り立っていれば自動的にこれらの行列は対角行列になります．ここで尋ねているのは，第一・第二基本行列がご質問の形になる理由です.

質問： 教科書 97 ページの 8 行目「曲面の点 P における主曲率 λ_1, λ_2 を与える接ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$」の与えるとはどういう意味ですか.　**お答え：**単位接ベクトルを 1 つ与えると，対応する法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が定まる．主曲率 λ_1, λ_2 はその ($\boldsymbol{v}$ を動かしたときの) 最大値・最小値なので，$\kappa_j(\boldsymbol{v}_j)=\lambda_j$ となるような単位接ベクトル $\boldsymbol{v}_j$ が定まる.

質問： 第一基本形式は「$I=$」の形では書かないのですか.

お答え： そうしたい気もするのですが，単位行列を表すのに I を使ってしまった（E は第一基本量として予約済み）ので，しようがないのです．ds^2 という記号はよく使うので特別変な記号ではないです.

質問： 曲面に $\mathbb{R}^3$ から相対位相をいれたとき，臍点の全体は閉集合になりますか.

お答え： 曲面自体が $\mathbb{R}^3$ の閉集合だとすると，臍点は関数 $H^2 - K$ の零点で与えられるので（命題 9.4）閉集合となります.

質問： 曲率線というのものがあまりはあくできません．どのような特徴があり，具体的にはどのようなものがあるのでしょうか.

お答え： 「あまりはあくできない」というのはどのような意味かわかりません．定義はわかるが意味がわからないということでしょうか．付録 B-5 にさまざまな性質がまとめてありますがいかがでしょうか.

質問： 漸近線座標とはどのような座標なのでしょうか．いまいちイメージがつかめません.

お答え： 「いまいちイメージがつかめない」は「定義はきちんと理解できていて，イメージはある程度はつかめているが，少し足りない」という意味にとってよいでしょうか．とりあえず定義をきちんと理解しておいてください.

質問： $H = 0 \Leftrightarrow$ 漸近方向が直交」の証明を教えて頂けるとありがたいです.

お答え： 命題 9.12 と，“$H = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1$”.

質問： 漸近線座標の求め方をもう少し詳しく説明していただけると助かります.

お答え： 自分で時間をかけて発見してほしいですが.... $II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \varphi\bigl(a\,du + b\,dv\bigr)(p\,du + q\,dv)$ と因数分解し，$d\xi = a\,du + b\,dv$, $d\eta = p\,du + q\,dv$ となる ξ, η をみつける．ただし φ は適当な関数．これをうまく選ばないと ξ, η が存在しない可能性がある.

質問： $\mathrm{Span}\{p_u, p_v\}$ の Span は何の略ですか?

お答え： 略ではなく span. The vector space spanned by $\{p_u, p_v\}$. = The vector space generated by $\{p_u, p_v\}$.

質問： 曲面上での漸近線は高等学校で習う漸近線に関連性はありますか? **お答え：**たぶんないです.

質問： $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$ となる分数（a, b, $c \in [0, 9]$, a, $b \in \mathbb{Z}$ となる分数は $\frac{16}{64}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{49}{97}$ でいいですか?

お答え： 知りません．総当りでやるんだと思いますが...

質問： 特になし. **お答え：**me, too.

11 ガウスの驚異の定理・測地線

- ガウス・ワインガルテンの公式（命題 8.5, 命題 11.1）
- ガウス方程式と驚異の定理（式 (11.10)）
- 測地線

問題

11-1 平面上の 2 点を結ぶ最短線は線分であることを示しなさい.

11-2 球面の測地線は大円であることを示しなさい.

11-3 曲面の第一基本量形式が $ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2$ と与えられているとする．ただし θ は (u, v) の関数である．このとき，この曲面のガウス曲率を求めなさい.

11-4 回転面を考える．$p(u, v) = \bigl(x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)\bigr)$ ただし $\bigl(x(u), z(u)\bigr)$ は弧長 u をパラメータとする平面曲線で，つねに $x(u) > 0$.

(1) パラメータ (u, v) はこの曲面の曲率線座標であることを示しなさい.

(2) とくに

$$\bigl(x(u), z(u)\bigr) = \Bigl(e^{-u}, u - \sqrt{1 - e^{-2u}} + \log(1 + \sqrt{1 - e^{-2u}})\Bigr) \qquad (0 < u < \infty)$$

のとき，対応する回転面の漸近線座標を求めなさい.

2016 年 1 月 12 日 (2016 年 1 月 13 日訂正)