2016 年 1 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 12

お知らせ

- **本日 1 月 18 日は，積雪・荒天による交通機関の乱れが予想されるため休講といたします．**
  第 12 回講義は 1 月 25 日となります．

前回の補足

- 問題 11-3: $K=-\theta_{uv}/\sin\theta$. $\sin\theta=0$ のときは，$EG-F^2=0$ となるので，ds^2 は正則な曲面の第一基本形式になっていない．
- 問題 11-4: (u,v) 自身が曲率線座標（回転面だから）．たとえば座標変換 $u=\log\cosh(\xi-\eta)$, $v=\xi+\eta$ によって (ξ,η) は漸近線座標．このとき，第一基本形式，第二基本形式はそれぞれ $ds^2=d\xi^2+2\cos\theta(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+d\eta^2$, $II=2\sin\theta(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$ の形に表され，さらに $\theta_{\xi\eta}=\sin\theta$ を満たすことが確かめられる（問題 11-3 の第一基本形式の形を参照せよ）．

前回までの訂正

- 講義資料 11, 前回の補足の最初の項目：$25a^4b^4c^4/(a^{10}+b^{10}+c^{10}) \Rightarrow 25a^4b^4c^4/(a^{10}+b^{10}+c^{10})^2$

授業に関する御意見

- 今日の講義で曲率線座標，漸近線座標について少し理解できました． **山田のコメント：** よかった
- 特にありません．/特にないです/特にないです。/特になし． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 主方向や漸近方向を求めると，扱っている曲面の凹凸の様子がイメージしやすくなるのでしょうか？曲率線座標や漸近線座標を求めることでえられる曲面の情報を知りたいです．

お答え： 漸近方向が存在するならガウス曲率は負なので，曲面は鞍型ですね．これは「存在」から言えることで，ご質問の意図とは違うとは思いますが．曲率線座標や漸近線座標は，図形的なイメージ（ってなんだ）もさることながら，むしろ「問題を解く時に良い座標をとる」ことに関連しているように思います．時間があれば講義で少し述べます．

質問： 主方向は曲面が一番曲がっていく方向なのですか?

お答え： 法曲率を「曲がりぐあい」と思えばそうである，といっているのが命題 9.3.

質問： （口で説明しづらいので図をかきますが；山田注：図省略）講義で主曲率 λ_1, λ_2 の符号が互いに異なるとき，下図のような $\kappa_n=0$ となる単位速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ がとれると言っていましたが，これは中間値の定理により，ということですか． **お答え：** はい，そうです．

質問： 曲率線座標でありかつ漸近線座標となるパラメータは存在しますか．

お答え： 漸近線座標が存在は $K<0$，すなわち主曲率は異符号である必要がある．これと定理 9.10 からわかるはず．

質問： 曲率線座標，漸近線座標は曲面の合同変換によって保存されますか．

お答え： これらは第一基本形式，第二基本形式によって特徴づけられますね（定理 B-5.1, B-5.4）．第一基本形式，第二基本形式と合同変換の関係はどうなっていましたっけ．

質問： 11-3 は E, F, G（第一基本量）がすぐわかるからガウスの驚異の定理にあてはめる，という方針でよいでしょうか． **お答え：**よいです．

質問： ガウス曲率を第一基本量で表すと，とても大変そうな計算を要求される気がしますが，第一基本量から簡単にガウス曲率を求める方法はありますか? **お答え：**十分に簡単な気がしますが．

質問： 講義中に「距離を保った」地図，正確な地図はつくれないという話がありましたが，それはすなわち，地球上の任意の 2 点を結ぶルートの道のりを正しく表す地図がない，ということですか．

お答え： そうです．「正確な地図」の定義はテキスト 76 ページから 78 ページ．

質問： ワインガルテン行列は 3 次元特有のものなのでしょうか．

お答え： いいえ．$\mathbb{R}^{n+1}$ の中の n 次元超曲面に対して $n \times n$ のワインガルテン行列を考えることができます．ちなみに，この文脈では「3 次元」というより「2 次元」といった方がしっくりきます．考えている図形は曲面という 2 次元的な図形（2 次元多様体）で 3 次元ユークリッド空間はその「入れ物」に過ぎないからです．

質問： 曲面があたえられたとき，それが回転面（を合同変換したもの）でないことを示す簡単な方法はありますか．

お答え： 回転面の「特徴付け」をどうするか，という問題でしょうね．よい性質をもつパラメータが存在する，という形になると思うので，その「否定」は難しいと思います．具体的な曲面に対して，その特殊性を用いて示すことになるんだと思います．（質問が具体的ならやってみせますが．）

質問： 問 11-3 の曲面はどのような曲面なのですか．

お答え： 第一基本形式しか与えられていないので，これだけでは曲面は決まりません．

質問： 授業で使われている教科書をレポート用紙等で参照する場合,『教科書』と書くだけでもよいですか．

お答え： よい．理由は講義概要で「教科書」としているから．「文脈内で特定できるだけの情報を書く」のが原則です．

質問： 特になし **お答え：**me, too.

12 測地線

- 最短線と測地線.
- 測地的曲率.

問題

12-1 半径 r の円柱面と平面の共通部分が，(パラメータをうまくとれば) 測地線になるのはどんなときか．

12-2 球面上の任意の 2 点 P, Q に対して，この 2 点を通る大円の弧のうち長くない方の長さを $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ とすると，d は三角不等式

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) \leqq d(\mathrm{A},\mathrm{C}) + d(\mathrm{C},\mathrm{B}) \qquad (\text{A, B, C は球面上の任意の点})$$

を満たすことを示しなさい．

12-3 わが街大岡山（北緯 35 度 36 分 19 秒，東経 139 度 41 分 01 秒@東京工業大学）と花の都パリ（北緯 48 度 51 分 11 秒，東経 2 度 22 分 09 秒@バスティーユ広場）の間の，地球上の最短線の長さを求めなさい．ただし，地球は赤道の長さが 40,000km の球であるとする．

2016 年 1 月 18 日