幾何学概論 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きにはは余白や裏面および所定の計算用紙を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案はおそくとも **2 月 10 日**には**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2016 年 2 月 15 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

問題 A [40 点] $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 p を

$$(*)\qquad p\colon \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \longmapsto p(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

で定義する．次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{7}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ，下線 **a** をつけた部分を証明しなさい.

- 式 $(*)$ の p は $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された微分可能な写像である.
  とくに，$_{\mathbf{a}}$$\underline{\mathbb{R}^2 \text{ 全体で } p \text{ は正則性の条件を満たす}}$，すなわちなめらかな曲面のパラメータ表示を与える．p の第一基本形式は $ds^2 = \boxed{1}$, 第二基本形式は $I\!I = \boxed{2}$ となるので，この曲面の主曲率は $\boxed{3}$，ガウス曲率は $\boxed{4}$, 平均曲率は $\boxed{5}$ である.
- 定数 c に対して，曲面上の曲線 $\sigma(t)$ を $\sigma(t) = p(c,t)$ で定める．このとき，加速度ベクトル $\ddot\sigma$ の曲面に接する成分 $[\ddot\sigma]^{\mathrm{T}}$ は
  $$[\ddot\sigma]^{\mathrm{T}} = \ddot\sigma - [\ddot\sigma]^{\mathrm{N}} = \boxed{6}$$
  となるから，$\sigma(t)$ が測地線になるのは $\boxed{7}$ の場合である（測地線になりえないならば，解答欄に×を記しなさい）.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$ に最もよくあてはまる数・式・言葉を入れなさい． [30 点]

弧長 s によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ が 0 でないとする．速度ベクトル $\gamma'(s)$ と一定の角をなす定ベクトルが存在するための条件を求めよう．求めるベクトルを

$$\boldsymbol{v} := a(s)\boldsymbol{e}(s) + b(s)\boldsymbol{n}(s) + c(s)\boldsymbol{b}(s)$$

と表す．ただし $a(s), b(s), c(s)$ は s の実数値関数で，$\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ はそれぞれ γ の単位接ベクトル，単位主法線ベクトル，単位法線ベクトルである.

ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\gamma'(s)$ が一定の角をなすことから，3 つの関数 a, b, c のうち，$\boxed{1}$ は定数でなければならない．この条件のもと，フルネ・セレの公式を用いて $\boldsymbol{v}$ を微分すると

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = \boxed{2}\boldsymbol{e} + \boxed{3}\boldsymbol{n} + \boxed{4}\boldsymbol{b}$$

となる（曲線の捩率は τ とせよ）．これが $\mathbf{0}$ になるためには a, b, c, κ, τ が条件 $\boxed{5}$ をみたさなければならない．とくに，同時に 0 にならない (a,b,c) で $d\boldsymbol{v}/ds = \mathbf{0}$ をみたすようなものが存在するためには，κ と τ は関係 $\boxed{6}$ をみたさなければならない.

裏面につづく

幾何学概論 定期試験 〔問題 2〕

問題 C [15 点] 次の (1), (2) のいずれかひとつを選択して解答しなさい：

(1) 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ とその曲率 $\kappa(s)$ が

$$\gamma(0) = (0,0), \qquad \frac{d\gamma}{ds}(0) = (1,0), \qquad \kappa(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

を満たしているとき，$\gamma(s)$ を s の式で具体的に表し，$\gamma(s)$ の像はどのような形になるか，図示しなさい．

(2) 零でない定数 a に対して，弧長 s に関する曲率関数 $\kappa(s)$ が $\kappa(s) = a\cos s$ となるような平面曲線を $\gamma_a(s)$ と書くことにする．$\gamma_a(s)$ が周期 2π の閉曲線になるような実数 a は存在するか．

問題 D [15 点] 次の (1), (2), (3) のいずれかひとつを選択して解答しなさい：

(1) 関数 $z = \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$ のグラフであたえられる曲面を漸近線座標で表しなさい．

(2) 曲面 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$ 上の点 (a,b,c) におけるガウス曲率を求めなさい．

(3) 「ガウス曲率は内的な量である」とはどういうことか説明しなさい．

問題 E [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

おつかれさまでした ♡

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 各 5 点

問題 a

$$p_u = (\cos v, \sin v, 0) \qquad p_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

だから

$$p_u \times p_v = \bigl(u \sin v, -u \cos v, 1\bigr), \qquad |p_u \times p_v|^2 = 1 + u^2 > 0$$

となり，p_u, p_v はつねに一次独立である．

1 $du^2 + (1+u^2)dv^2$

2 $-\dfrac{2}{\sqrt{1+u^2}}\, du\, dv$

3 $-\dfrac{1}{1+u^2}, \qquad \dfrac{1}{1+u^2}$

4 $-\dfrac{1}{(1+u^2)^2}$

5 0

6 $-c(\cos t, \sin t, 0)$

7 0

問題 B の解答欄 各 5 点

1 a

2 $-b\kappa$

3 $a\kappa - c\tau + b'$

4 $b\tau + c'$

5 $b = 0$, c は定数，$a\kappa - c\tau = 0$ (a は定数)

6 τ/κ は定数．

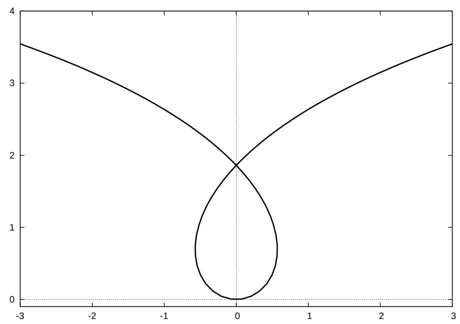
学籍番号			-						氏名	

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 C の解答欄 15 点

☐ ← 選択した問題番号を記入する

(1) $\gamma(s) = \bigl(-s+2\tan^{-1} s, \log(1+s^2)\bigr)$.



(2) <u>存在する</u>

$\theta(s) = \displaystyle\int_0^s \kappa(u)\,du = a\sin s$ とおけば，$\gamma_a(s)$ は（回転と平行移動をのぞいて）
$\gamma_a(s) = \left(\displaystyle\int_0^s \cos\theta(u)\,du, \int_0^s \sin\theta(u)\,du\right)$ と表される．ここで $\theta(s)$ は周期 2π をもつので，

$$\begin{aligned}
\gamma_a(s+2\pi) &= \int_0^{2\pi} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du + \int_{2\pi}^{2\pi+s} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du \\
&= \int_0^{2\pi} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du + \int_{2\pi}^{2\pi+s} \bigl(\cos\theta(2\pi+u), \sin\theta(2\pi+u)\bigr)\,du \\
&= \int_0^{2\pi} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du + \int_0^{s} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du \\
&= \gamma_a(s) + \left(\int_0^{2\pi} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du, \int_0^{2\pi} \sin\bigl(a\sin u\bigr)\,du\right) = \gamma_a(s) + \left(\int_0^{2\pi} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du, 0\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで最後の等式は $\sin(a\sin u)$ が周期 2π の奇関数であることによる．したがって，γ_a が周期 2π をもつため
には $F(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du$ が 0 となればよい．いま

$$\begin{aligned}
F(a) &= \int_0^{\pi} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du + \int_{\pi}^{2\pi} \cos\bigl(a\sin(2\pi-u)\bigr)\,du = 2\int_0^{\pi} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\bigl(a\sin(\pi-u)\bigr)\,du\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du \\
&= 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\bigl(a\sin u\bigr)\,du + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)\,du\right) \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \bigl(\cos\bigl(a\sin u\bigr) + \cos\bigl(a\cos u\bigr)\bigr)\,du = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{a}{2}(\sin u+\cos u)\right)\cos\left(\frac{a}{2}(\sin u-\cos u)\right)\,du \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\right)\cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\right)\,du
\end{aligned}$$

である．とくに $F(0) = 2\pi > 0$ であるが，

$$\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\right) < 0, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\right) > 0, \qquad \left(0 < u < \frac{\pi}{4}\right)$$

なので $F(\pi) < 0$. F は a について連続だから，中間値の定理より $F(a) = 0$ となる a が存在する．

学籍番号			-						氏名	

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 D の解答欄 15 点

x $\boxed{}$ ← 選択した問題番号を記入する

(1) $p(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, \dfrac{1}{2}uv\right)$.

(2) $\dfrac{4abc}{(a^4+b^4+c^4)^2}$

(3) 曲面のガウス曲率は第一基本量のみによって定まる.

学籍番号			-						氏名	

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 E [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 4 枚 (この紙を含む) と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **4 枚揃っていない答案は採点いたしません**.
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号				-						氏名	