

2016年10月6日(2016年10月13日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 2

前回の補足

- 問題 1-2 で $\lambda^2 = 1$ とされた方がいらっしゃいましたが、結論として得られる行列の固有値は $1, e^{\pm i\theta}$ なので、一般に $\lambda^2 = 1$ は成り立ちません。
- 「題意が示された」という答えが 2 件ありました。山田は「題意」の意味を知りませんので、どなたか教えて下さい。広辞苑には「題の意味するところ」とあり、歌会などで用いられる意味のようです。一方、数学の答案では「仮定」を意味する場合と「結論」を意味する場合の両方が観察されます。まったく反対の意味で使われているので「仮定」「結論」と言いわけ、「題意」を使うことを避けるのがよいと思います。それでも「題意」を使いたい方は、山田に意味を教えてください(できれば 1 次情報も添えて)。

前回までの訂正

- 講義資料 1, 6 ページ, 9-12 行目: C^r -級 $\rightarrow C^\infty$ -級 (定理のステートメント自体は誤りではありません)
- 代数学 algebra の語源について、次のご指摘をいただきました:(以下引用) 大層どうでも良い指摘でございますが、“Algebra” の語源は人名である、という旨を仰りましたが、私の記憶が正しければそれは誤りです。“Algebra” の語源となったのは “al-jabr” というアラビア語「移項する」という意味の言葉です。Al-Khwarizmi による最古の代数学書「hial al-jabra wa'l muqabala」のタイトルのなかにお見られます。語源は人名、というのが私の間違いでしたらどうぞこのご指摘はお忘れください。(引用おわり)
ご指摘ありがとうございます。おっしゃるとおりのようです。訂正します。

授業に関する御意見

- 去年先生の講義を受講していた人が「あの先生はやばい。」と言っていたのですが本当のところはどうなのでしょう?
山田のコメント: 「やばい」の意味によると思います。
- 今年から第 1,2 で分けられていますが、第 2 だけを履復(原文ママ: 履修のことか)するのは可能ですか? 3Q は学科の必修と被っているのですが。
山田のコメント: 可能です。第二では第一の内容を「前提知識」とますのでそれだけご了承ください。
- 板書で、定理の記述で仮定と結論をもう少しわかりやすくわけて書いてもらえるとありがたいです。
山田のコメント: 了解。
- 課題締切に近い事が一点気にかかりました。うっかり提出を忘れがちになります。満点半減の上で遅れての提出を認めていただけると精神衛生上ありがたいのですが、流石に態度が甘いでしょうか。
山田のコメント: 複数の締切・基準を設けると処理が複雑になり、山田の精神衛生上よろしくないなので、お赦してください。
- 陰関数定理が鮮明にイメージできました。
山田のコメント: それはよかったです。
- 陰関数定理の具体例を用いた説明でいままでにイメージできていなかったことがイメージできてよかったです。
山田のコメント: それはよかったです。
- 図を使った説明や具体例が多くてわかりやすかったです。
山田のコメント: それはよかったです。
- この授業は演習の時間が少ないため、レジュメに多くの問が載っていることはありがたい。自習に役立てようと思う。
山田のコメント: よろしく。
- 特にありません。
山田のコメント: me, too.
- これからよろしく願います。(Me, too と返してきますよね)
山田のコメント: いいえ、「こちらこそ」とお返しするのが定形となっております。
- 半年間よろしく願います。
山田のコメント: こちらこそ。

質問と回答

質問 1: 質問ですが, 閉集合とは主にどのようなところで利用されるのでしょうか. 授業中に端のない開集合の方が微分を行う際に端を考えなくていいため簡単だから解析では開集合を使って定義すると仰いましたが, そう言われてみると, わざわざ最大元まで含む閉集合はあまり使い道のなさそうなものに思えてしまいます. 閉集合はやはりほしい開集合をつくるために利用されるものなのでしょうか. それとも閉集合単体で議論されることはあるのでしょうか.

お答え: たとえば積分(重積分)の積分範囲はどういう集合でしょう. ちなみに, 閉集合が「最大限を含む」というのはどういう意味でしょう. たとえば \mathbb{R} 自身は \mathbb{R} の閉集合ですが.

質問 2: 授業で領域の定義を「連結な開集合」としていて, 閉集合で定義すると境界の扱いが厄介ということでしたが, それは例えば陰関数定理, 逆関数定理で「領域 U 」における点 p の ε 近傍 V を考える際に, 処理に問題が生じるということでしょうか? 他に厄介なことはあるのでしょうか?

お答え: 意味がわかりません. 関数の定義域を開集合にするのは境界での微分可能性の定義が面倒くさい(あとでやりますが)からと申しあげましたが, 陰関数定理・逆関数定理では何も言及していません. この文脈では「 \mathbb{R}^n と同じだけの広がりがある」集合であることが重要です.

質問 3: 陰関数定理によって陰関数が求められるとどう役立つのでしょうか? たとえば陰関数を微分して傾きを求めたいなら, もとの関数の偏微分から求められませんか?

お答え: $F(x, y) = 0$ が $y = f(x)$ の形に「解ける」(求められるのではない)ことが重要です. すなわち「このような関数 f の存在」を言っているのが陰関数定理. この f が存在しているので, F の偏導関数から f の微分係数がわかる. もし f が存在しないなら偏導関数から微分を計算する議論自体が成立しません. ところで, 「傾き」ってなんでしょう. 「関数の傾き」という語は存在しません. 「関数のグラフの接線の傾き」の意味ならそのようにちゃんと言いましょ.

質問 4: 1変数関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のある点 $a \in \mathbb{R}$ での微分係数 $f'(a)$ はその点におけるグラフの接線だとよく言われますが, n 変数関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ のある点 $a \in \mathbb{R}^n$ におけるヤコビアンが何を表わしているかわかりません. ヤコビアン, あるいはヤコビアンが 0 であることは幾何的に何か意味があるのでしょうか?

お答え: 微積分の教科書で「重積分の変数変換の公式」の説明を見て下さい. $n = 2$ のときは, 関数の「線形近似」の面積比. ちなみに「 $f'(a)$ はその点におけるグラフの接線だとよく言われます」は嘘. 関数 $f(x) = x^2$ について, $f'(1) = 2$ だからといって「 f の 1 における接線は 2」というフレーズは意味がありますか?

質問 5: イントロダクションで, 幾何は位相幾何と微分幾何に大きく分かれていて, 微分幾何では平行移動して同じ図形は同じものと考え, 位相幾何では同じもののみならず条件が少しゆるくなるとおっしゃっていました. しかし, 今までやってきた xy 平面上の関数は条件が微分幾何の条件より厳しくなってしまうので, 幾何とは考えないのでしょうか. 例えば $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ と $g(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 1$ は平行移動したら同じですが, 異なる関数と考えているときです.

お答え: 意味がわかりません. まず「関数」と「図形」を混同していますね. 区別してください. ちなみに $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ と $\{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ は \mathbb{R}^2 のことなる部分集合ですが, これらは合同変換で移り合います. このような図形に「共通な性質」が幾何学的性質と思える. そのようなものを取り出すことを考えよう, ということをお話ししたのです.

質問 6: 合同変換に相等するものは等長写像ですが, 相似変換に相等するものは何ですか?

お答え: この文脈での「相等」の意味がわかりません. 「相当」ではないんですね. この授業では \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への等長写像のことを合同変換と呼ぶことにします.

質問 7: 微分幾何学を用いて説明できる身近なことはありますか?

お答え: いろいろありますが, 何があなたに身近か分かりませんので, 回答は差し控えさせていただきます(山田は微分幾何学の研究者なので, 微分幾何学に関わることはたいてい日常生活の一部ですので, 山田の基準は適当ではないと考えます).

質問 8: 私たちが高校で習んだ(原文ママ: 学んだのことが?) 余弦定理と講義で出てきたベクトルの内積を用いた余弦定理とどちらがより一般的でしょうか.

お答え: 講義の文脈では同じものですか? 一般に内積をもつ線形空間では「余弦定理」が成り立つ, というのはそれなりに一般的ですかね. ところで, 高等学校で学んだ「角度を用いた内積の定義」から「内積の成分表示の公式」を導

くにはどうしたらよかったですっけ。

質問 9: 区間 $I \subset \mathbb{R}$ において $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (C^∞) が I 上でつねに微分係数が 0 でないならばその区間における逆関数が存在するが、領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ において $g: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ が D 上でつねにそのヤコビアンが 0 でなくても、その領域における逆写像が存在するとは限らない、という話がありました。これは \mathbb{R}^2 上には自身と交わらない閉曲線が存在するのに対し、 \mathbb{R} 上には存在しないことと関係あるのかなと思ったのですが、実際のところ理由はあるのでしょうか。あるいはたまたまですか？

お答え: おっしゃることは的を射ているような気がしますが (多分同じことを違う言葉でいっている) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ と $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の性質の違い (連結性) から来ているはず。

質問 10: 微分幾何学では合同変換を扱うが、その変換は \mathbb{R}^n の通常の位相において連続写像と一般になりますか。

お答え: 線形変換は連続ですね。

質問 11: この講義では「 C^∞ -級のことを可微分という」とありますが、解析学では可微分という単語は「(C^1 -級かはわからないが)微分可能である」という意味で使っていたと思います。「簡単のため」とありますが、どう簡単になるのかわかりません。むしろまぎらわしい気がします。

お答え: 習慣で、たとえば “differentiable manifold” は通常 “ C^∞ -級多様体” を表します。このような文脈にも慣れて頂けると助かります。この授業では、ご質問の「可微分」を表したいときは「微分可能」という言葉を使うことにします。

質問 12: プリントの 6 ページの定理 1.12 において f が C^r -級写像となっているが、ここは C^∞ -級でなくてよいのでしょうか。板書では C^∞ -級になっていました。

お答え: C^r -級を仮定すると結論も C^r -級、 C^∞ -級を仮定すると結論も C^∞ -級になります。ステートメントはこれでよいのですが、文脈としては C^∞ にしたほうがよいですね。

質問 13: 微分幾何では積分がしばしば出てきますが、そのとき、測度論の知識が必要なような議論が行われたりすることがあるのでしょうか。

お答え: もちろん現代の数学ですから、普通に使います。この授業の範囲ではとくに必要ないと思います。

質問 14: 常微分方程式はどういった点で使うのでしょうか？

お答え: 曲線の基本定理、測地線の存在など。

質問 15: C^1 級でない微分可能な関数として $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ がよくあげられますが、微分可能で導関数がすべての点で不連続な関数はありますか。なければ証明をお願いします。

お答え: それほど自明ではないようです。Baire functions で検索してみましょう (微分可能な関数の導関数は Baire class 1 になるらしい)。Andrew Bruckner “Differentiation of real functions” (Lect. Notes in Math. 659, Springer-Verlag 1978) にこのあたりの解説があるらしい (申し訳ありません、ちゃんとチェックしてません。ちなみに <https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183545222> に書評があります。)

質問 16: 講義資料の問題については、解説や解答の配布等はあるのでしょうか？

お答え: ありません。質問項目として上げて頂ければ対応できます。その際は「どこまで考えてどこがわからないのか」を明示してください。

質問 17: 指定された教科書は授業内で利用するのでしょうか。

お答え: ご質問の意味によります。「このページを開いて読んで下さい」ということはしませんが、適宜参照します。

質問 18: 講義資料に記されている「問」は宿題の中で使用して良いですか。

お答え: よいです。

質問 19: 転置行列 A^t の t は transpose の t でした。

お答え: テキストでは ${}^t A$ と書いていますね。 A^T と書くこともあります。ちなみに transpose は動詞なので、この場合「転置したもの」の意味で transposition という名詞を使うのが妥当かと思います。

質問 20: 「曲線と曲面」の中の例 (式) を計算する途中で、よく違和感をもつのだが、たとえば p 88 の中間くらいに第一基本形式 $ds^2 = du^2 + x^2 dv^2$ となるから第一基本量 $E = 1, F = 0, G = x^2$ となると書かれてあるが、先に ds^2 の式が求まるのですか？ 私は先に $E = p_u \cdot p_u, F = p_u \cdot p_v, G = p_v \cdot p_v$ の値を求めて ds^2 の式を作ってしまうのですが、 ds^2 を先に考えられる方法を教えてください。また、その後の第二基本形式 II も同様。

お答え: とりあえず授業内容とは直接関係ありませんね。ご質問の件、該当箇所にあるように $ds^2 = dp \cdot dp$ と書き、これを展開しているつもり。もちろん、やっている計算はまったく同じですが。

2 平面曲線の表示

復習 (陰関数定理)

定理 2.1 (逆関数定理, 教科書 199 ページ, 定理 A-1.5 の前半). 点 a を含む数直線の区間上で定義された C^∞ 級関数 $f(x)$ が $\dot{f}(x) \neq 0$ をみたすならば, $f(a)$ を含む区間で定義された C^∞ -級関数 $g(y)$ で $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ をみたすものがただ 1 つ存在する. さらに, g の導関数 \dot{g} は

$$\dot{g}(y) = \frac{1}{\dot{f}(g(y))}$$

をみたす.

定理 2.2 (陰関数定理, 教科書 200 ページ, 定理 A-1.6 の特別な場合). 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への可微分写像

$$F: U \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$$

と $(x_0, y_0) \in U$ が

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

を満たしているとき, (x_0, y_0) の近傍 V と x_0 を含む \mathbb{R} の区間 I と, その区間 I 上で定義された可微分関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $V \cap \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ が成り立つ. とくに $F(x, f(x)) = 0$ が成り立つ.

さらに $f(x)$ の導関数 $\dot{f}(x)$ は

$$\dot{f}(x) = - \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$$

をみたす.

注: テキスト 200 ページに誤植あり. 正誤表参照.

陰関数表示

- 「曲線 $F(x, y) = 0$ 」という文の意味.
- 曲線 $F(x, y) = 0$ が, 点 (x_0, y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件 (テキスト 4 ページ)
- 陰関数表示の特異点 (テキスト 4 ページ)
- 関数のグラフは陰関数表示とみなせること (テキスト 3 ページ)

パラメータ表示

- パラメータ表示 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (テキスト 4 ページ)
- パラメータ表示の正則性と特異点 (テキスト 6 ページ)
- 自己交叉: パラメータ表示では特異点でない場合がある (テキスト 6 ページ)
- パラメータ変換 (テキスト 5 ページ)

- 関数のグラフはパラメータ表示とみなせること (テキスト 4 ページ)
- 極座標表示された曲線 (テキスト 8 ページ)

弧長

- 曲線の長さの定義 (テキスト 7 ページ, 問 2.3 参照)
- 弧長の不変性 (テキスト 9 ページの問題 2)

問 2.3. 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された C^∞ -級関数 f のグラフを C とする: $C = \{(x, f(x)) | x \in I\}$. I の任意の分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^N d(P_{j-1}, P_j) \quad \left(P_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, N \right)$$

とおく. ただし, d は \mathbb{R}^2 のユークリッド距離を表す. このとき,

$$(*) \quad \sup\{\mathcal{L}_\Delta | \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

となることを示しなさい. (ヒント: 平均値の定理, 積分の定義, 連続関数の積分可能性.)

例

- 楕円 (テキスト例 1.1, 例 1.3 の最初の例)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

ただし $a > 0, b > 0$.

- レムニスケート (テキスト例 1.1, 例 1.3 の 3 番目の例の $a = 1$ の場合)

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

$$r^2 = \cos 2\theta.$$

問題 1-4 (Cassianian oval カッシニの橙線と呼ばれる) の $a = c$ ($a = 1$) の場合.

- 標準的な 3/2-カスプ (テキスト付録 B-8)

$$x^3 - y^2 = 0$$

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

問題

- 2-1 原点をひとつの焦点にもち、もうひとつの焦点が x 軸の負の部分にあるような楕円は、極座標 (r, θ) を用いて $r = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ と表示されることを示しなさい。ただし $\varepsilon \in [0, 1)$ は離心率、 a は正の定数である。 $\varepsilon = 1, \varepsilon > 1$ の場合にこの式は何を表すか。
- 2-2 次のような xy 平面上の曲線のパラメータ表示を求めなさい：曲線上の点 P において曲線に引いた接線と y 軸との交点を $Q = (0, t)$ とするとき線分 PQ の長さが一定 a で、かつその曲線は点 $(a, 0)$ を通る。ただし、パラメータは Q の y 座標 t を用いなさい。
- 2-3 xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を、 x 軸上に滑らないように転がすとき、放物線の焦点はどのような曲線を描くか。
- 2-4 正の整数 m を用いて極座標表示された曲線 $r = \cos m\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を図示し、それと同じ長さをもつ楕円を求めなさい。