2016 年 10 月 13 日 (2016 年 10 月 20 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 3

前回までの訂正

- テキスト 5 ページ，一番下（アステロイド）: $x(t)=a^3\cos^3 t$, $y(t)=a^3\sin^3 t \Rightarrow x(t)=a\cos^3 t$, $y(t)=a\sin^3 t$
- テキスト 7 ページ，(1.4) 式：$\gamma(t)=a^3(\cos^3 t,\sin^3 t) \Rightarrow \gamma(t)=a(\cos^3 t,\sin^3 t)$
- 講義資料 2, 1 ページ，前回の補足，第 2 項目の下から 2 行目：言い理由 ⇒ 言いわけ
- 講義資料 2, 3 ページ，質問 20 の 2 行目：基本料 ⇒ 基本量
- 講義資料 2, 5 ページ，4 行目：問題 2-5 参照 ⇒ 問 2.3 参照

授業に関する御意見

- 先生が学生に質問を当てる時の足どりが速すぎてビックリするのでもうすこしゆっくりしてくださると助かります．
  山田のコメント： びっくりしてもいいじゃないですか．
- テストの難易度はどのくらいでしょうか？ できれば例年の平均点を知りたいです．
  山田のコメント： 平均点は意味がないので出していません．問題は易しいです．過去問を見て下さい．
- 金曜日が休みの日は，提出を月曜に延ばしていただけるとありがたいです．
  山田のコメント： すみません．工大祭準備休講を忘れていました（自分のクラスがないと気が付きにくいですね）．月曜日も休みなので，月曜日にのばしてもありがたくないですね．授業の最初に気がついた人が発言してくれると嬉しいですね．
- 具体例が多くて非常にわかりやすい講義でした．今までに学んだことの複習（原文ママ：復習のことですよね．復讐でなく）をしてくれるのも本当に助かります．
- 具体例を多めに用いて説明して下さるのでわかりやすい．
  山田のコメント： 具体的な説明は，その中の「注目すべき性質」にきちんと注目しないと誤解がおきるのですが，大丈夫？
- “速度” と “速さ” の説明の，高速道路での「逆走注意」で「速度注意だ」のオチが面白かったです．
  山田のコメント： すみません，いつも使っているネタなんです．
- なぜ弧長パラメータを使おうとするかが少し納得できました．弧長（長さ）はどんなパラメータの取り方をしようとも，長さは不変で目にみることのできるものだから大事なのですね．（だからピタゴラス派（宗教）も長さによる数学にこだわったのかなと思いました．） **山田のコメント：** どうなんですかね...
- 不安ですががんばります **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 弧長で，パラメータ変換によって移り合うときは同じになるという話があって気になったのですが，像が同じ正則な曲線のパラメータ表示の間には，必ずパラメータ変換が存在するのでしょうか？ 気持ちとしては集合として同じ（もっというと合同な）曲線の長さは一致してほしいので．

お答え： はい．次のような意味で存在します：$\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ $\tilde\gamma(s)=\bigl(\tilde x(s),\tilde y(s)\bigr)$ $(\alpha\leqq s\leqq\beta)$ がともに曲線の正則なパラメータ表示で，写像としてはともに単射であるとする．さらに像が一致 ($\gamma([a,b])=\tilde\gamma([\alpha,\beta])$) し，$\gamma(a)=\tilde\gamma(\alpha)$, $\gamma(b)=\tilde\gamma(\beta)$ を満たす（すなわち進行方向が同じ）ならば，C^∞-級関数 $\varphi\colon[a,b]\to[\alpha,\beta]$ で $\dot\varphi>0$ をみたし $\gamma\circ\varphi=\tilde\gamma$ を満たすものがただ一つ存在する．
証明の概略は次の通り：(1) γ, $\tilde\gamma$ が単射であることから，各 $t\in[a,b]$ に対して $\tilde\gamma(s)=\gamma(t)$ となる $s\in[\alpha,\beta]$ がただ一つ存在するので，写像 $\varphi: t\mapsto s$ が存在する．(2) 写像 φ の可微分性は次のようにして示せる：点 $s_0\in[\alpha,\beta]$ において $\tilde x'(s_0)\neq 0$ $({}'=d/ds)$ であるとき，$(s_0-\varepsilon,s_0+\varepsilon)$ で $\tilde x(s)$ は単射で，C^∞-級の逆関数 $s=\sigma(\tilde x)$ が存在する．ここで $s=\varphi(t)$ とすると $\tilde x(s)=x(t)$ だから $\varphi(t)=\sigma\circ x(t)$．が成り立つが，$\sigma$ も x も C^∞-級だから φ は t_0 $(\varphi(t_0)=s_0)$ の近傍で C^∞-級．$\tilde x'(s_0)=0$ ならば，パラメータ表示の正則性から $\tilde y'(s_0)\neq 0$ ので，x を y におきかえて同じ議論をすることができる．(3) 合成関数の微分公式から $\tilde\gamma'=\dot\varphi\dot\gamma$ であるが，$\tilde\gamma$ も γ も正則なパラメータ表示なので $\dot\varphi\neq 0$．さらに $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$ $(a<b,\ \alpha<\beta)$ なのだから $\dot\varphi>0$ でなければならない．

質問 2： 一つの曲線は，2 つのパラメータで表すとき，この 2 つのパラメータは必ず相互変換できるか．もしできれば証明しなくてもよろしいですか．

お答え： 上の質問と回答のように証明できます．

質問 3： 「正則にパラメータづけられる」とは幾何的（図形的?）な意味としては曲線が特異点をもたないという解釈で正しいですか?

お答え： 特異点は（この講義では）曲線の性質というよりは，曲線のパラメータ表示，曲線の陰関数表示の性質です．教科書 4 ページ（陰関数表示の特異点），6 ページ（パラメータ表示の特異点）参照．これらの違いについては 6 ページから 7 ページに説明があります．曲線のパラメータ表示 $\gamma(t)$ の特異点とは $\dot\gamma(t_0)=\mathbf{0}$ となる点ですから，「パラメータ表示された曲線が特異点をもたなければパラメータ表示は正則」というのはあたりまえ．この文脈では「解釈」は不要です．

質問 4： どんなパラメータをとっても正則なパラメータ付けができない曲線の条件と例を教えて下さい．

質問 5： パラメータ付けられた曲線がそのパラメータ付けについて正則でない場合，その曲線を正則にパラメータ付けることは可能ですか．また，一般には可能でないとしたら，可能か否か判定条件はありますか．

お答え： これは講義で言及しました：正則にパラメータづけられているなら，各点の近くで $y=f(x)$ のグラフまたは $x=g(y)$ のグラフで表すことができる．ただし f, g は C^∞-級の関数．
たとえば $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ は $t=0$ で特異点をもちます．これは $x=\sqrt[3]{y}^2$ とグラフ表示できますが，右辺の関数は $y=0$ で微分可能ではありません．また $y=\pm\sqrt{|x|}^3$ なので，原点の近くで曲線を $y=f(x)$ と表示できるような関数 f は存在しません．

質問 6： $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ で表される平面曲線を 3/2-cusp というらしいですが，なぜ 3/2 という中途半端な値が話題にあがるのでしょうか? 何か他のものと深いつながりはあるのでしょうか?

お答え： $y=\pm|x|^{3/2}$ なので 3/2 といいます．（パラメータ表示された）平面曲線の特異点のうち，最も “頻繁に” (generic に) 現れる特異点がこの特異点に “同値” な特異点なので，重要です．テキスト付録 B-8 参照．

質問 7： 標準的 (3/2) カスプというのが授業ででてきましたが，カスプとはなんでしょうか．辞書で調べたら尖点とありましたが，パラメータ表示の特異点と同じでしょうか．

お答え： 文字通りの意味でいえば「とがった（尖った）点」．“3/2 カスプ” の意味はテキスト付録 B-8 参照．

質問 8： アステロイドの “尖点” やレムニスケートの “自己交叉” の他にも曲線の特異点の形は存在しますか?

お答え： $\gamma(t)=(t^m,t^n)$ は m, n がともに 2 以上なら $t=0$ に特異点を持ちます．これは尖点などとは違った特異点です．“違った” の意味は付録 B-8 参照．

質問 9： 講義資料の問 2.3 に C^∞-級とありますが，C^1-級でも成り立ちませんか? 平均値の定理を用いるためには関数が C^1-級であることが必要で，それ以外の定理（山田注：積分可能性などのことか）は C^0-級であれば成り立つと思うのですが．

お答え： C^1-級を仮定すれば十分です．質問の後半ですが「連続関数の積分可能性」は，「$\sqrt{1+(f')^2}$ の積分可能性」という形で使いますので，この関数が連続，すなわち f が C^1-級であることが必要です．

質問 10： パラメータ表示する際に「正則性」について確認しました．行列の「正則性」であったり，複素関数の「正則」関数であったり，何かとさんすう（原文ママ）では「正則」という言葉を使いますが，それぞれ別のものなのに，似たような言い回しをするのはどうしてだと思いますか．

お答え： Regular の訳語．辞書で英単語の本来の意味を調べてごらんなさい．対義語は singular.

質問 11： 陰関数定理（講義資料 2, 4P の場合）において $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ が条件に必要な理由を再度教えて下さい．

お答え： もし，結論を満たす関数 f があったとしましょう．すると $f(x_0)=y_0$，かつ $F(x,f(x))=0$ が成り立ちます．そこで，$h(x)=F(x,f(x))=0$ を x で微分すると，合成関数の微分公式を用いて

$$0=\frac{dh}{dx}(x)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))+\frac{df}{dx}(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))$$

となり，とくに $x=x_0$ を代入すれば，

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{df}{dx}(x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0).$$

この式から，もし $F_y(x_0,y_0)=0$ で $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ なら，$df/dx(x_0)$ は存在しない，すなわち，結論を満たすような可微分関数 f は存在し得ないことがわかります．$F_x=F_y=0$ のときはなにが起きるかわかりません（さまざまな場合がある）ので，この定理では何も言っていません．

質問 12： “陰関数 $F(x,y)=0$ がなめらかな曲線を与える” と講議（原文ママ：講義のことだと思います．間違えないように！）でありましたが，陰関数 $F(x,y)$ という言葉が唐突に感じました．$F(x,y)=0$ が $y=f(x)$ の形にとける関数という意味でしょうか？

お答え： いいえ．等式 $F(x,y)=0$ で与えられた x と y の関係のことです．ここでは「$F(x,y)=0$ を曲線の陰関数表示という」という使い方しかしません．

質問 13： なめらかな曲線の定義にある「合同」とはどういった意味でしょうか．講義内で定義がなされていないように思います．

お答え： 合同変換で移り合うこと．

質問 14： 講義中に三角関数の半角の公式で遊べるとおっしゃっていましたが，具体的にはどのようにして遊ぶことができますか? 半角の公式の遊び方についてぜひ教えてください!

お答え： 講義中にひとつやった．積分の計算なんかによく使いますよね.

質問 15： 今回出題された問題 2-4 に “曲線 $r=\cos m\theta (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$” なるものが出てきたが，これは $r=m\theta$ の誤りか?

お答え： いいえ．どうして誤りと思ったのでしょう．

質問 16： なぜパラメータづけられた曲線を表すときに γ (ガンマ) を用いるのですか?

お答え： とくに理由はないと思われます．こじつけると “curve” だから “c”，すなわちローマ文字のアルファベットの 3 つめ．ギリシア文字のアルファベットの 3 つめは? ちなみに，アテネ・オリンピックの入場行進を見ていたら，フランスが随分最初の方にでてきてびっくりしました．$\mathit{\Gamma\alpha\lambda\lambda\iota\alpha}$ なんですね.

質問 17： 楕円の図がヘタクソなのですがコツはありますか?

お答え： 昔，テンプレートを使いました．とくにコツはないと思いますが，教育実習の前に練習しました.

質問 18： 今回は “なめらかであること” の定義を新しく導入しましたが，“なめらかである” もしくは “なめらかでない” ということがわかるメリットはありますか?

お答え： うれしくない? 「メリットがある」かどうかは多分に個人的なことで，山田はあなたが何に対してメリットを感じるかわかりませんので，回答は差し控えさせていただきます.

質問 19： 普段「$\sim$ についての対称性より. . . である」というように対称性についてさほど深く言及せずに使っているのですが，多少突っ込んだ説明を加えた方が良いのでしょうか? またどの程度まで言及すれば良いかも教えて頂ければ幸いです.

お答え： 文脈によります．ただし，言及してもしなくても「もっと詳しく」と要求されればそれに答えられるようでなければいけません.

質問 20： 点滴にも速度注意と使われていました．これはさすがに誤用でしょうか.

お答え： 吸いだしたりはしませんよね.

質問 21： 問題 2-4 で楕円の周の長さは求められないのに，長さを与えれば，その周を長さとする楕円をつくるのは面白いと思いました.

お答え： それって数式の力ですよね.

質問 22： 講義中，例をあげられるとき e.g. と Examples の 2 つの表記をお使いですが，これらの間には区別はあるのでしょうか.

お答え： とくに区別していませんが，“for example” で置き換えられるときに e.g. を使うようにしているつもりです.

質問 23： 特に無し/特にありません **お答え：** me, too.

3 弧長パラメータと曲率 (教科書 §2)

■弧長パラメータ表示

- 速さが 1 になるパラメータを弧長パラメータという（12 ページ）

■曲率・曲率円

- 曲率の定義（13 ページ (2.5) 式），計算法（13 ページ (2.6) 式；弧長パラメータ，14 ページ (2.7) 式；一般のパラメータ）．
- 曲率のパラメータ変換による不変性：定義から直接わかる．
- 曲率の回転・平行移動による不変性：(21 ページ 系 2.7)．
- 曲率円（15 ページ），これが「曲線をもっともよく近似する円」であること（17 ページ，定理 2.4）

問 3.1. 懸垂線 $y = \cosh x$ に対して

- その弧長パラメータ表示を求めなさい．
- 曲率の定義から，弧長パラメータ s の関数として曲率を求めなさい．
- 上の結果とパラメータ変換の式を用いて曲率を x の関数で表しなさい．
- 一般の助変数表示に対する曲率の公式（テキスト 13 ページの式 (2.7)）を用いて懸垂線の曲率を求め，上の結果と一致することを確かめなさい．

問題

3-1 レムニスケート

$$\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

の弧長関数を $s = s(t)$ とし，弧長パラメータでの表示を $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq L = s(2\pi))$ とする．$\gamma(s)$ の曲率関数を $\kappa(s)$ とするとき積分 $\displaystyle\int_0^L \kappa(s)\,ds$ の値を（計算により）求めなさい．

3-2 陰関数 $F(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ で与えられる曲線 C を考える．

(1) C 上の全ての点は，陰関数表示 $F(x, y) = 0$ の特異点ではないことを確かめなさい．

(2) C の曲率の絶対値が最大・最小となる点とそこでの曲率の絶対値を求めなさい．

(3) 曲率の符号はどのように定めればよいか．

3-3 パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ での速度ベクトルを $\boldsymbol{e}$, 接線を l とする．もし，t_0 での γ の曲率が正（負）ならば，t_0 の近くで $\gamma(t)$ は $\boldsymbol{e}$ に向かって l の左（右）側にある．このことを示しなさい．曲率が 0 の場合はどうか．

3-4 弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が 0 でないとする．このとき，3 点 $\gamma(s_0) = \mathrm{P}$, $\gamma(s_0 + t) = \mathrm{Q}_t$, $\gamma(s_0 - t) = \mathrm{R}_t$ を通る円 C_t は $t \to 0$ とすると s_0 における γ の曲率円になることを示しなさい．

2016 年 10 月 13 日 (2016 年 10 月 20 日訂正)