

2016 年 10 月 20 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 4

お知らせ

- 来週 10 月 27 日は休講とさせていただきます。次回は 11 月 3 日 (文化の日) となります。休日授業で
ご迷惑をおかけいたしますが、鉄道ダイヤに気をつけておいでください。
- 次回, 11 月 3 日は定期試験の 2 週間前にあたりますので, 定期試験の予告を行います。皆様お誘い合
わせの上, ご来場ください。

前回までの訂正

- 黒板で例に挙げた曲線 $(t, \cosh t)$ の曲率: $1/\cosh^2 t$ が正しい ($1/\cosh^3 t$ と書いたかも知れない)。
- 講義資料 3, 2 ページ, 質問 7 の 1 行目: 尖点とお \Rightarrow 尖点と

授業に関する御意見

- 7 番の黒板が先に消えた瞬間, ぼくの感情も消えました。山田のコメント: Sorry!
- 毎回のレポート問題を提出しなくても, 期末テストで点をとれば単位はもらえますか。問題を解く時間がありません。山田
のコメント: 第 1 回にご連絡しましたように, 原則として定期試験で成績を決めます。提出物のスコアは, 定期試験で失敗した
場合に考慮されます。
- レポートの計算量が, 期日の割に多い気がします。
- 木曜日には毎週の予定が入っているため, せめて課題の計算量を減らしていただかないと, 睡眠不足で学業に支障をきたします。
山田のコメント: そんなに多いですか? (ブラックですか?)
- 問題文で計算することが指示されていても, ある程度計算過程を省略していいですか。
山田のコメント: はい。計算の過程が再現できる程度にとどめ, 適切に省略すべきだと思います。
- 例示といっしょに公式を導出していただいたため, イメージをつかみやすかったです。山田のコメント: よかった。
- フルネの公式はおもしろいですね! 速度ベクトルの変化の方向と法線ベクトルの変化の方向が法線ベクトルの方向と速度ベクトル
の方向に一致して, なおかつそれらの大きさが曲率の大きさであるということですよ (まちがっていたら指摘してください)。
曲率を定義したことのありがたみを感じました。山田のコメント: そうです。
- 点 s での曲率を $e'(s) = \kappa(s)n(s)$ と定義して, 中心 $\gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$, 半径 $\frac{1}{\kappa(s)}$ の円がその曲線の点の付近を近似している
という結果が得られるのは当たり前なことなんですか。
山田のコメント: 正確なステートメントはテキスト §2 の定理 2.4 です。それほど当たり前ではない気がします。
- 先生は楽しそうに授業をなさいますね。山田のコメント: そういうふりはできます。
- 特にないはずですか。山田のコメント: そうですか。
- 特にないです (これは Me, too ですよ?) 山田のコメント: Yo, tambien.

質問と回答

質問 1: 曲率を弧長パラメータを用いて定義しましたが, そのメリットを僕なりに考えたところ, 回転や平行移動で不
変であるのがすぐ分かること, $\tilde{\gamma}(s)$ の速さが一定なので $e' \perp e$ となり, 曲率の定義がわかりやすいことの 2 つを
考えました。しかしこれらは単なる利便性の話で, 弧長を用いる必要はないように感じます。曲率を弧長パラメ
ータで定義しなければならない理由はありますか? 或いは曲率と弧長の間には何か密接な関係があるのでしょうか?

お答え: もちろん $\kappa = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})/|\dot{\gamma}|^3$ で曲率を定義してもよいです。これを定義に採用するときは, 曲率がパラメータ
のとり方によらないことの証明が必要です。弧長が積極的に必要となるのは, 平面曲線の基本定理だと思います。

質問 2: 黒板で $\tilde{\gamma}'' = \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)' \dot{\gamma} + \frac{1}{|\dot{\gamma}|^2} \ddot{\gamma}$ となっているように思うのですが、積の微分から 内 (山田注: 右辺第 2 項の係数の分母) は $|\dot{\gamma}|$ であるように見え、なぜこうなっているのかわかりませんでした。

お答え: テキストにしたがって、記号 $'$ は弧長 s に関する微分、 $\dot{}$ は t に関する微分と考えています。すると $ds/dt = |\dot{\gamma}|$ に注意すれば

$$\frac{1}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}' = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{d}{ds} \dot{\gamma} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \dot{\gamma} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \ddot{\gamma}$$

質問 3: κ の公式 $\frac{1}{|\dot{\gamma}|^3} \det(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'')$ を導く前の式で、 $\det(\frac{1}{|\dot{\gamma}|} \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}' + \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \tilde{\gamma}'')$ となっていました、下線部は $\frac{1}{|\dot{\gamma}|^2 \tilde{\gamma}''}$ ではないのでしょうか。

お答え: 一つ前の質問の回答のような記号の使い方をするとプライムではなくドットではないでしょうか。

質問 4: Frenet 枠と呼ばれる (山田注: と呼ばれる?) 2 次正方形行列が $SO(2)$ の元であることの幾何学的解釈をもう一度教えて下さい。お答え: 列ベクトルが正の向きに正規直交系。

質問 5: 弧長以外に、それによってパラメータ表示することが有意義であるような幾何学的な量は知られていますか?

お答え: 数学は自由なものですから、考えたい問題にうまく適合していれば何をとってもよいのです。例としては、「幾何学いろいろ」(井ノ口順一, 日本評論社, 2007) の 4.4 節とか。

質問 6: \mathbb{R}^3 内の曲面にたいして、曲率円と同じ考察をすることはありますか? つまり、曲面内の 1 点の近傍を近似する球を考えることはありますか。

お答え: 「幾何学概論第二」で扱います。一般には二次曲面で近似するのが筋がよいようです。

質問 7: どんな図形でもおり返したら曲率の符号が逆になってしまうのなら、曲率の符号を考える必要はあるのでしょうか?

お答え: (1) ハンドルを右に切る, 左に切るという違いを区別しよう, という文脈では必要。(2) 折り返した図形を同じと見なすと, 曲率の符号に絶対的な意味はないが, ひとつの曲線が曲率の符号を変える, という性質は折り返しによって不変。そのような点 (変曲点) を調べるのは重要では?

質問 8: $e'(t) = \kappa(t)n(t)$ になることは分かったのですが, $\kappa(t) = e'(t) \cdot n(t)$ になることが分かりません。すみません。もう一度教えて下さい。お答え: 両辺に $n(t)$ を内積する。

質問 9: 曲率を 2 通りの求め方で求めれば, 弧長が計算できないような関数でもその弧長が逆算で求められると思うのですが, どうでしょうか (逆関数が存在したとして)。

お答え: 具体的にはどうすればよい? たとえば懸垂線などで実行してごらん下さい。

質問 10: 曲率 = 0 となる点において色々な場合があるとありましたが, 具体的にはどのような場合があるのでしょうか? また, それはどのように判定すればよいのでしょうか。

お答え: 整数 $n (\geq 3)$ に対して, 曲線 (t, t^n) を考える (関数 $y = x^n$ のグラフ)。点 $t = 0$ でこの曲線の曲率は 0 であり, その点で接線 (x 軸) と n 次の接触 (テキスト 16 ページあたり) をしますが, 曲線の像は, n が偶数のとき接線の片側, 奇数のときは接線をまたぎます。

質問 11: 曲率がゼロなら直線であることはわかりました。では曲率が無限大になると, それは点になるのでしょうか。

お答え: 正則な曲線の曲率は無限大にはなりません。それでは, 標準的な $3/2$ カスプ (t^2, t^3) の曲率は $t \rightarrow 0$ (特異点に近づく) ときどうなるでしょう。

質問 12: 講義資料問 3.1 を自力で解いたところ, どうしても結果が合わない ($1/\cosh^2 x$ とならない) ので誤りをご指摘いただければ幸いです。 $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ とする。 $\gamma'(t) = (1, \sinh t)$ より $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$ 。また弧長パラメータ $s(t) = \int_0^t \cosh t dt$, それによる表示を $\tilde{\gamma}(s)$ とする。 $e = \tilde{\gamma}'(s) = \frac{dt}{ds} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\cosh t} (1, \sinh t) = (\frac{1}{\cosh t}, \tanh t)$ 。 e を 90° 回転させた $n = (\tanh t, 1/\cosh t)$ 。 $e' = (-\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}, \frac{1}{\cosh^2 t}) = \frac{1}{\cosh t} n$ 。 よって曲率 $\kappa = 1/\cosh t$ 。

お答え: 最後の e' は de/ds のこと。ここでは de/dt を計算していませんか?

質問 13: 問題 [2-1] (山田注: 3-1?) に関連して。レムニスケートのように曲率を積分した結果, 値が 0 となるような閉曲線に共通の特徴 (例えば自己交叉をもつかどうか) はありますか。お答え: 今回扱う「回転数」がキーワード。

質問 14: 問題 3-1 について, レムニスケートは応用上どのように重要なんですか。また, 実生活の中で, レムニスケートはどのような場所で見られますか。

お答え: 毎年, 例として挙げていて, 山田の仕事の一部なので, 山田は実生活でレムニスケートを常に目にしているといえます。あなたの実生活がどういうものか知りませんので, あなたの実生活のどこに現れるかは知りません。ググってみるといろいろな物語が楽しめます。ヤコブ・ベルヌーイとかガウスの名前が出てきますね。

質問 15: 今回の問では一体何を求めているのでしょうか? 円の場合曲線の長さを直接表しましたが, レムニスケートは $\sin \cos$ カーブといった変曲点があり, 対称性がある曲線は積分結果で打ち消しあい, 必ずしも可視化できる値を示していない気がします.

お答え: 何を言っているのか全然わかりません. 「レムニスケートは $\sin \cos$ カーブといった変曲点があり, 対称性がある曲線」というフレーズの意味を説明してください. 少なくともレムニスケートは \sin カーブや \cos カーブではありません. また「可視化」という言葉をどういう意味で使っているのかも知りたいです. レムニスケートの可視化といえは, その絵を描けばよいはずですが「可視化できる値」というのはまったく意味不明.

質問 16: フルネ枠 \mathcal{F} が $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ (κ は曲率) を満たすことの幾何学的意味を教えてください.

質問 17: Frenet の公式 $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ は幾何学的に何を表す式なのでしょう. \mathcal{F} を微分してみたらこうなった, ぐらいのことですか.

お答え: 講義では「フレームの回転する度合い」ということを少し口走ったはず. 今回「平面曲線の基本定理」と関連して少し説明します.

質問 18: 授業で登場した曲線 $\gamma(t) = (at^3 + p, bt^3 + q)$ は正則ではないですが, t^3 を t と置き換えれば正則になります. サイクロイドのようなグラフから直感的に正則ではない曲線はどのようなパラメータをとっても正則にならないように思いますが, このことは数学的に証明できますか.

お答え: はい. 正則にパラメータ付けられた曲線は, 各点に近傍でなめらかな関数 $y = f(x)$ のグラフに合同になります. そのような関数 f が存在しないことを示せばよいのです.

質問 19: $3/2$ カスパがよく見かけるカスパだと, 質問&お答えパートで書かれていますが, それは一般のパラメータの曲率において $\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x} + \dot{y})^{3/2}}$ (p. 14 (2.7)) (原文ママ: 分母がおかしい), $\kappa(t) = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y})^{3/2}}$ (p. 14 (2.8)) (原文ママ: たぶん独立変数は x で, やはり分母がおかしい) のような分母が $3/2$ 乗される形の式があるからなのでしょう. それとも上の式とは関係ないのでしょうか.

お答え: 無関係です.

質問 20: $\kappa(s) = s$ はどうして平面曲線になるのですか. κ は曲がりぐあい, というイメージがあり, κ が一定なら円か曲線 (原文ママ: 直線?) になることはなんとなく理解できます.

お答え: 平面曲線の基本定理から関数 $\kappa(s)$ を与えると, それを曲率にもち s が弧長となる曲線がただ一つ存在するから.

質問 21: 曲率は曲線の特徴付ける量であるが, どのような経緯で曲率という概念が登場したのですか.

お答え: 曲線を円で近似するところから来ていそうです. 「曲率半径」の方が古くからある概念のようです.

質問 22: 問題の計算がとても難しいのですが, 練習あるのみでしょうか?

お答え: そんなに難しいですか? 練習というより, 少しだけ「格闘」してもらうのがよいかな.

質問 23: 成績の出し方を知りたいです.

お答え: 講義資料 1, 1 ページ.

質問 24: κ が上手に書けません. 上手く書くコツはありますか?

お答え: たとえば <http://www.tomakomai-ct.ac.jp/departement/gene/am/education/greek.html>

4 平面曲線の曲率

曲率関数の性質

- パラメータのとり方によらない (標準的なパラメータに変換して定義しているから).
- パラメータを s から $-s$ に変更する (曲線の向きを反転させる) と曲率は符号を変える.
- 曲線に回転と平行移動を施しても曲率は不変 (教科書 21 ページ, 系 2.7; 証明は後半)
- 曲線のある直線に関して折り返すと曲率は符号を変える (教科書 27 ページ, 問題 4).
- 半径 $a > 0$ の左回り (右回り) の円の曲率は $1/a$ ($-1/a$), 直線の曲率は 0 (教科書 13 ページ, 例 2.1).
- 曲率円は曲線と 2 次の接触 (教科書 16 ページ, 定義 2.3) をする, すなわち曲線を最もよく近似する円 (教科書 17 ページ, 定理 2.7).
- ガウス写像と曲率.

フルネの公式

- フルネ枠 (教科書 22 ページの (2.15) 式に現れる \mathcal{F})
- フルネの公式 (教科書 21 ページ, 式 (2.14), 22 ページ (2.15))
- 平面曲線の基本定理

閉曲線 (概略のみを扱う)

- 回転数 (教科書 29 ページ)
- 単純閉曲線と回転数 (教科書 31 ページ, 定理 3.2)
- 閉曲線の正則ホモトピー類と回転数 (教科書 33 ページ, 定理 3.3)

問題

- 4-1 s を弧長パラメータとし, 曲率関数が $\kappa(s) = 1/(1+s^2)$ となるような曲線のパラメータ表示 $\gamma(s)$ を求めなさい.
- 4-2 パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の左向き単位法線ベクトル場を $n(t)$ と書くとき, 任意の実数 u に対して $\sigma_u(t) = \gamma(t) + un(t)$ であたえられる曲線 σ_u を $\gamma(t)$ の平行曲線とよぶ. $t = t_0$ における γ の曲率が 0 でないとき, t_0 が $\sigma_u(t)$ の特異点になるような u の値を求めなさい.
- 4-3 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ ($-\infty < s < +\infty$) の曲率 $\kappa(s)$ が周期 L をもつ周期関数であると次問いに答えなさい.
- (1) 曲線論の基本定理を用いて, 行列 $A \in \text{SO}(2)$ と $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ で次を満たすようなものが存在することを示しなさい: 「 $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \mathbf{b}$ が任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ .」ただし, $\gamma(s)$, \mathbf{b} は 2 次の列ベクトルとみなしている.
 - (2) さらに $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma'(0) = (1, 0)$ とするとき, (1) の A , \mathbf{b} を κ を用いて表しなさい.