2016 年 11 月 3 日 (2016 年 12 月 8 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 5

お知らせ

- 本日 11 月 17 日に実施予定の定期試験の予告を致します．欠席された方は講義 web ページ，OCW にて情報を得てください．個別のお問い合わせは受け付けません．

授業に関する御意見

- 「数学解くガウス」，逆から読んでも「すうがくとくがうす」になります．凄い!!
  山田のコメント： なるほど．ところで「数学解く」ってどういう動作なんでしょうね．「数学の問題を解く」や「方程式を解く」はわかるんですが．
- いつもわかりやすい授業ありがとうございます．グローバル化は狭めてしまっているんですね．
  山田のコメント： わかりやすいことはよいことなんでしょうか/そうなんです．
- 問 4-1 は前回のプリントの問 3-1 の逆の操作をしていたんですね．平面曲線の基本定理のありがみが分かった 1 問でした．
  山田のコメント： それはよかった．
- ガウスの 10 倍のお札のクララ・シューアンの夫，ロベルト・シューマンも好きです．
  山田のコメント： クララの曲にも結構いいのがありますね．イ短調（ロベルトのと同じ）のピアノ協奏曲とか．当時はクララのほうがずっと有名だったそうです．
- 雑談がとても面白いので参考にさせていただきます．
  山田のコメント： まあ，いいですけど，あまり真面目にとらないでくださいね．自己責任でご使用ください．
- 面白い授業です． **山田のコメント：** Thanks
- 「特にありません」は否定文なので “me, too” ではなく，“Me, neither” と返さなくてはいけません．
  山田のコメント： I have nothing to say... というつもりだったんですが．
- 特になし **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： $\kappa = \kappa(s)$ である曲線の存在性を示されたとき，$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du$, $\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} (\cos\theta(u), \sin\theta(u))\,du$ (s_0 は固定) としましたが，証明を見ても（略，最初の積分の）s_0 と，（次の積分の）s_0 と異なっても全然かまわないと思いますが，わざと一致された理由はありますか? 一致した結果は “$s = s_0$ のとき，$(0,0)$ を速度 $(1,0)$ で通る” の意味であるのは知っていますが，もし s_1 と s_2 を使って（略）“$s = s_2$ のとき $(0,0)$ を通り $s = s_1$ のとき速度は $(1,0)$” になってもかまわないのではないでしょうか．（$s_1 = s_2$ とさせた理由が特にありますか?）

お答え： とくにありません．とにかく 1 つ曲線をつくればよいのだから適当においた，と思えばよい．

質問 2： フレネル積分 $\int_0^\infty \cos\frac{\theta^2}{2}d\theta = \int_0^\infty \sin\frac{\theta^2}{2}d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は複素解析の知識無しで示すことはできますか? できるならば教えてください! (大学 1 年次の微分積分学，および現在解析学の講義で学んでいるベクトル解析などは使ってもよいことにします).

お答え： 残念ながら知りません（できないとは言っていない).

質問 3： 曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長パラメーター) の自然方程式を $\kappa = \kappa(s)$ と書いたとき，$\kappa'(s) > 0$ ならば $\lambda = \lim_{s\to\infty} \gamma(s)$ を満たす点 $\lambda \in \mathbb{R}^2$ が存在するという主張は正しいですか? もし間違っていれば反例をお願いします．

お答え： “自然方程式” を持ち出すまでもなく「$\kappa'(s) > 0$ となる曲線 ($a \leqq s < \infty$) は $s \to \infty$ で 1 点に収束する」ということですね．正しくありません．$\gamma(t) = e^{1/t}(\cos t, \sin t)$ $(1 \leqq t < \infty)$ とおくと，t は γ の弧長ではないが，$d\kappa/dt > 0$ と $d\kappa/ds > 0$ は同値だから，弧長パラメータにとりなおせば質問の条件を満たしています．しかし $t \to \infty$ で 1 点に収束しません．

質問 4： Clothoid 曲線が $s \to \infty$ で 1 点に近付くかある円に近付くかという問を「ある半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の円に近付くとすると $s \to \infty$ で $\kappa(s) = \frac{1}{r} < \infty$ だが，これは $\kappa(s) = s$ に矛盾するので一点に近付く」と考えたのですが，これは誤りで Frenet 積分（原文ママ，Fresnel 積分のことか）の広義積分からでしか得られない事実なのでしょうか．

お答え： 「曲線が十分に近ければ曲率が十分に近い」は自明でしょうか．授業では「円に近付くか，1 点か」という問にしたので，ご質問のように考えたのかもしれませんが，円に近づかなかったら 1 点なのでしょうか．

質問 5： $r = \cos 3\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ のように同じ軌道を複数回通る閉曲線の場合，長さや回転数はどのように定義されますか．軌道をとおった回数で割りますか?

お答え： ご質問の曲線は θ の範囲を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に限っても閉曲線になりますね．すなわち，この曲線は θ に関して周期 π とみなせます．すると π の正の整数倍はすべて周期になるので，「周期 π とみなすなら，積分の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \pi$」「周期 2π とみなすなら，積分の範囲は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$」など，考えている周期を積分の範囲と考えます．たとえば円 $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$ は周期を 2π とみなせば回転数 1，周期を 4π (円をふたまわり）とみなせば回転数 2.

質問 6： κ から $\gamma(s)$ を構成しましたが，あの構成方法は発見的なものなのでしょうか? 根拠があるなら知りたいです．

お答え： 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$ と $(1, 0)$ のなす角を $\theta(s)$ とすると，$\boldsymbol{e}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$. $\boldsymbol{e}'(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$ なので $\kappa(s) = \theta'(s)$.

質問 7： $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\, ds = i_\gamma$：回転数 ですが，レポート問題 3-1 のレムニスケートのように $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\, ds = 0$ の場合は回転数が求められて良いことはありますか? $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\, ds = 0$ というのが何か幾何的に特別な性質を表しているのでしょうか?

お答え： それでは $i_\gamma \neq 0$ の場合はなにか良いことがありましたか? 0 の場合だけ特別に考える理由は? 「回転数が 0」ということ自体が幾何学的な性質です．もちろん，回転数が 0 の曲線は連続的に変形してレムニスケートにすることができる，という意味で重要です．

質問 8： 教科書 p 30 にレムニスケートの回転数は 0 とありますが，直感とは反しているような気がします．回転数を直接計算せず，回転数が 0 であることを理解できる図形的な説明を教えて下さい．

お答え： どういう直感でしょう．あなたの直感を説明してください．直感的にも 0 になることがわかると思います．ちなみに「全曲率」は単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$ が単位円を動いた道のり（符号つき）でしたね．レムニスケートについて，$\boldsymbol{e}(s)$ の動きを確かめてごらんなさい．

質問 9： 回転数について扱ったときに気になったのですが，1 周して元に戻り，かつなめらかでない曲線は閉曲線と呼称しないのでしょうか．見た感じ閉じているように思うのですが．

お答え： 曲線の微分幾何学の文脈では，閉曲線と呼ばないことが多いようです．ご質問のような曲線，すなわち曲線 $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq L)$ が $\gamma(0) = \gamma(L)$ をみたすが，γ がなめらかな周期関数に拡張されるとは限らないような曲線を，山田は**ループ**と呼んでいます．

質問 10： 曲率以外で曲線を特徴づけるようなよく知られた概念はありますか．

お答え： 「特徴づける」というのを「回転と平行移動で移りあう曲線を同一視したとき，曲線と 1 対 1 に対応する量」とみなすと，そういう量は $F(\kappa)$ (F はある関数) となってしまいませんか？（平面曲線の基本定理の帰結）

質問 11： 私は曲率を理解するのに「曲率円」を考えているのですが，他にも曲率の解釈があれば教えていただきたいです．

お答え： 曲線を特徴付ける量，曲線上を運転するときのハンドルの傾き，単位接ベクトルの変化する速さ，フルネ枠の回転の速度... ということを授業で話しました．

質問 12： 曲線のなす集合を記述する際，以下のような記述は適切ですか? (1) $\{C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \,|\, C$ についての条件 $\}$ （平面の部分集合のなす集合族）(2) $\{\gamma(s) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \gamma(s)$ についての条件 $\}$ もし上の 2 つのどちらも不適切なら，適切な記述を教えて下さい．

お答え： あまりに「一般的・抽象的」なのでどう答えていいものか．それでは「$\mathbb{R}^2$ の円全体の集合」をご質問の (1) や (2) のように具体的に書いてください．その記述をみれば判断できると思います．

質問 13： 前回，今回とやった平面曲線の基本定理には “基本” という語が付いていますが，何をもって “基本” とつけているのでしょうか? (他にも代数学の基本定理などがありますが).

質問 14： 今回は「平面曲線の基本定理」を学びました．数学の世界を見渡すと他にも「代数学の基本定理」とか「微分積分学の基本定理」とか「基本」と名のつく定理が存外多くあります．こやつらは何をもって「基本」と名付けられているのでしょうか? 定理が基本定理と呼ばれる背景には一般にどのような意図がありますか?

お答え： なにかの対象をきちんと特徴づけている，ということでしょうか．厳密な使い方の一般規則があるようには思えませんが.

質問 15： 問題 4-1 に関連して，$\gamma(s)=\int_0^s\left(\cos\left(\int_0^t\kappa(u)\,du\right),\sin\left(\int_0^t\kappa(u)\,du\right)\right)\,dt$ で曲率関数から曲線のパラメータ表示ができることを利用しました．授業で，関数と曲線が，回転と平行移動を除いて一対一対応であることを示しましたが，上のようなパラメータのとり方以外に $\kappa(s)$ から導ける曲線パラメータは $|\dot\gamma|=|\ddot\gamma|=1$ を満たせばあり得ますか．とれた場合は上のものと同一ないしは回転や平行移動したものになるってことですよね.

お答え： ご質問の意味がまったくわかりません．$\kappa(s)$ を指定したときにすでにパラメータ s が指定されていると思いますが．ところで “$|\dot\gamma|=|\ddot\gamma|=1$” という条件はどこから来たのですか?

質問 16： ある区間において定義されたなめらかな関数 $\kappa(s)$ に対して，$\kappa(s)$ を曲率とする平面曲線が 1 つ定まることはわかりました．では，あるなめらかな任意の曲線は，1 つの曲率 $\kappa(s)$ で表現しきることはできるのでしょうか?

お答え： ご質問の意味がわかりません.「あるなめらかな任意の曲線」とはどんなものを表していますか? ある曲線が与えれれたら，それから曲率が決まってしまいますが,「1 つの曲率で表現しきる」とはどういうことですか?

質問 17： 問題 4-3 で言いたいことは，グラフが変化しないようなパラメータの置換も，数式上では平行移動と回転で表されるということですか.

お答え： 何を言っているのかわかりません．この授業の文脈では「グラフが変化しないようなパラメータの置換」という言い回しを使ったことがないのですが.

質問 18： 特異点では曲線を定義できないのでしょうか.

お答え： 意味がわかりません．ここで考えているのは「曲線の特異点」なんですが.

質問 19： 曲率の問題は基本的に高校数学をよく使うイメージが私にはありますが，高校生に教えることはできますかね？（教えたいんですよね. . . .）

お答え： やってみてごらんなさい．ご自分で「教科書」らしきものを書くことを試みればいいんです.

質問 20： 前回の資料のご意見をみて，円の半径が $1/|\kappa(s)|$ が与えられる計算 p. 13, 例 2.1 は易しいがとても心落ち着かせるものなので授業でやってもよかったのではないかと思いました．そうすると，半径にたいしての車のハンドルのキリ具合と「速度注意!」に続く高速道路ネタである「曲○半径」を広めることができ，退屈な高速の運転を楽しむことができる．居眠り注意!!

お答え： 逆走もね.

質問 21： 今回はないです. **お答え：**そう?

5 空間曲線

■準備：外積

- 基底の正負（教科書 204 ページ）
- 外積（教科書 207 ページ）

■空間曲線の曲率と捩率

- 弧長によってパラメータ付けられた曲線（教科書 51 ページ）
- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$, 曲率 κ, 捩率 τ （教科書 51–52 ページ）
- フルネ・セレの公式（教科書 54 ページ）

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

問題

5-1 半径 a の球面上の曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) の捩率が 0 でないとき，曲率 κ と捩率 τ は

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2$$

を満たすことを示しなさい.

5-2 空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s_0)$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s_0)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s_0)$ がそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向き，$\gamma(s_0) = 0$ となるような座標系をとる．このとき，$s = s_0$ の近くでの曲線の像の xy 平面，yz 平面，zx 平面への正射影はどのような形になるか，図示しなさい. ただし s_0 における曲率と捩率はともに正の値をとるとする.

5-3 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率，捩率が

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \qquad \tau(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする.

- ある一定な単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい.
- この $\boldsymbol{v}$ に対して，$\gamma(s)$ の，$\boldsymbol{v}$ の直交補空間への正射影 $\gamma^* = \gamma(s) - \bigl(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v}$ はどんな曲線か.

2016 年 11 月 3 日 (2016 年 12 月 8 日訂正)