

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 6

お知らせ

- 次回 11 月 17 日は定期試験となります。11 月 3 日に配布した予告を受け取っていない方は、講義 web ページ, OCW からダウンロードしておいてください。
- 今回は提出物はありません。

前回の補足

一般のパラメータに関する曲率・捩率の公式：テキスト (5.6), (5.7) 式を導こう。パラメータ t で表された空間正則曲線 $\gamma(t)$ の弧長パラメータを $s = s(t)$ とおくと、

$$(6.1) \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{d}{dt}, \quad \text{したがって} \quad e = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}.$$

これをさらに弧長 s で微分する：

$$(6.2) \quad e' = \frac{de}{ds} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{d}{dt} \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \left(\frac{\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} - \frac{(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3} \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|^4} (|\dot{\gamma}|^2 \ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) \dot{\gamma}).$$

ここで、ベクトル値関数 $c(t)$ に対して

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{|c|} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{c \cdot c}} = \frac{-\frac{d}{dt}(c \cdot c)}{2\sqrt{c \cdot c}^3} = -\frac{2(\dot{c} \cdot c)}{2\sqrt{c \cdot c}^3} = \frac{\dot{c} \cdot c}{|c|^3}$$

が成り立つことを用いた。すると

$$(6.3) \quad \kappa = |e'| = \frac{||\dot{\gamma}|^2 \ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) \dot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^4} = \frac{\sqrt{|\dot{\gamma}|^4 |\ddot{\gamma}|^2 + (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})^2 |\dot{\gamma}|^2 - 2|\dot{\gamma}|^2 (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})^2}}{|\dot{\gamma}|^4} = \frac{|\dot{\gamma}| \sqrt{|\dot{\gamma}|^2 |\ddot{\gamma}|^2 - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})^2}}{|\dot{\gamma}|^4} \\ = \frac{\sqrt{|\dot{\gamma}|^2 |\ddot{\gamma}|^2 - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})^2}}{|\dot{\gamma}|^3} = \frac{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}$$

を得る。ここではラグランジュの恒等式 $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$ (テキスト 207 ページ, (A-3.5)) を用いた。すると (6.2) と (6.3) から

$$(6.4) \quad n = \frac{e'}{|e'|} = \frac{e'}{\kappa} = \frac{|\dot{\gamma}|^2 \ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}| |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|},$$

$$(6.5) \quad b = e \times n = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \times \frac{|\dot{\gamma}|^2 \ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}| |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} = \frac{|\dot{\gamma}|^2 (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) (\dot{\gamma} \times \dot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^2 |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} = \frac{|\dot{\gamma}|^2 (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^2 |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|}$$

を得る。 e, n, b はこの順で正の向き正規直交系をなすから、

$$(6.6) \quad n = b \times e = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}| |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}}{|(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}|}$$

と、テキスト 55 ページの (5.6) 式における n の表示を得る。ここで、最後の等式の変形で $(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})$ と $\dot{\gamma}$ が直交すること、直交する 2 つのベクトル a, b に対して $|a \times b| = |a| |b|$ (テキスト 207 ページ, 12 行目の式の $\theta = \frac{\pi}{2}$ の場合) が成

り立つことを用いた。さらに

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{b}' &= \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \right) (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \right) \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \left(\frac{\ddot{\gamma} \times \ddot{\gamma} + \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}'}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \right) (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \left(\frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}'}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \right) (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \right). \end{aligned}$$

ベクトル積の定義より $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ はともに $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$ に直交することに注意すれば, \mathbf{n} の (6.4) の表示を用いて

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \tau &= -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} = - \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|} \left(\frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}'}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \right) (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \right) \right) \cdot \frac{|\dot{\gamma}|^2 \ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}| |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \\ &= - \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}'}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} \right) \cdot \frac{|\dot{\gamma}|^2 \ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}) \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}| |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|} = - \frac{|\dot{\gamma}|^2 (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}') \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2 |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2} = - \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}') \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2} = - \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}', \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2} \\ &= \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}')}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2} \end{aligned}$$

を得る。ここで, スカラ三重積の公式 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (テキスト 208 ページ, 命題 A-3.1) を用いた。

前回までの訂正

- 「板書での従法線ベクトル \mathbf{b} の向きが左手系になっていたような気がします (図省略)」というコメントがありました。書いて頂いた図の \mathbf{b} と \mathbf{n} のラベルが違っているようです。テキスト 52 ページ, 図 5.1 が正しい図です。

授業に関する御意見

- 前回の質問に対して「具体的に書いてください」とのお答えを頂いたので, 具体的に書いたところ, どちらでもよいと判断できました。抽象的なことだけでなく, 具体的に考えることも大事なのだと今一度感じました。
山田のコメント: そうなんです。そして具体的に考えるのは結構難しい。
- 次回の授業では一般のパラメータにおける $e(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t), \kappa(t), \tau(t)$ を求める公式は扱いますか。教科書 p 57 の問題 2 の解答がよく分からないのでやってほしいです。
山田のコメント: 上に計算を書いてみました。
- 授業内容に関する質問で 3 点をもらうためには, どのような質問をすればよいのでしょうか。
山田のコメント: 3 点: 自分で手と頭を動かして考えていると推測できる。2 点: 普通。1 点~0 点: 講義で述べた内容そのもの・明らかな質問・授業内容と関係ない。ただし主観。
- カンニングに狼煙を使う場合, まず問題の情報をこちら側から発信する必要がありますが, 室内だと狼煙は効果が薄いので非効率的だろーと思いました。
山田のコメント: それに危険。本館で狼煙を見たら 119 番してください。その際, 住所は「大田区石川町 1-31, 東京工業大学本館」と伝えること。「目黒区大岡山 2-12-1」だと管轄外の消防署につながり消火活動ができません。
- 狼煙でカンニングはできないと思います。
山田のコメント: 危険だからやめてくださいね (違)
- ベクトルよりベクトルの方がかっこいいと思いました。
山田のコメント: なんで? 英語話者に「ベクトル」は通じなさそう。
- 小林昭七先生の昭七が生年とはおどろきです。
山田のコメント: ですよ。
- クララ・シューマンもいいですよ。
山田のコメント: ね。
- 「何」を「カ」と読むことを知るきっかけが「誰何」と「幾何」の 2 つだというのは無理があるように感じます。「如何に」という言葉がありますし, 「荷」という字から類推もできると思います。
山田のコメント: そうですね。他に用例ありますか?
- 前回の講義資料を読んで「数学の美!」と西に飛び退くガウス」というのを思いつきました。
山田のコメント: すごいね。こんなの思いつくんだ。
- 問題が難しく, 期限が短い大変です。
山田のコメント: そう?
- 特になし。
山田のコメント: me, too.

質問と回答

質問: 教科書には接触平面, 法平面, 展直平面という 3 種類の平面が登場しますが, これらは重要ですか。接触平面を考える意味は何となく分かる (掠率と関係している) のですが, 他の 2 つの平面を考える場面が分かりません。

お答え: 講義資料 5 の問題 5-2 ではこれらの平面への曲線の射影を考えていますね。

質問: 平面曲線と似たように (?) 空間曲線も関数 κ, τ から回転や平行移動を除いて一つの曲線に定まるのでしょうか。

お答え: はい, それが今回やる「空間曲線の基本定理」。

質問: \mathbb{R}^n ($n \geq 4$) 内の曲線について, 次元が増えていくと, 曲率や捩率とはまた違ったものを導入しなければならないように思いますが, 具体的にどのように定義すればよいのでしょうか?

お答え: $\gamma(s)$ を \mathbb{R}^n の曲線 (s は弧長) とするとき, $e_1 := \gamma'(s)$, $e_2 := \gamma''(s)/|\gamma''(s)|$, $\kappa_1 := |\gamma''(s)|$ とおく。(空間曲線のときに $\gamma''(s) \neq 0$ としてきたように, 以下分母が 0 にならないもののみを考える). e_2 は e_1 に直交するが, $e_2 \cdot e_1 = -e_1' \cdot e_2 = -\kappa_1$ だから, $e_2' = -\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_3$, $e_3 \in \text{Span}\{e_1, e_2\}^\perp$ となるような単位ベクトル e_3 と κ_2 が (各 s ごとに) 存在する. 以下, 帰納的に $e_j' = -\kappa_{j-1} e_{j-1} + \kappa_j e_{j+1}$, $e_{j+1} \in \text{Span}\{e_1, \dots, e_j\}$ により, e_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) と $\kappa_j (> 0)$ ($j = 1, 2, \dots, n-2$) を定める. e_n を $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ に直交する単位ベクトルで $\det(e_1, \dots, e_n)$ が正 (1) となるように定めると, $\{e_1, \dots, e_n\}$ は各 s 毎に \mathbb{R}^n の正規直交基を与える (フルネ枠). さらに $\kappa_{n-1} := -e_n \cdot e_{n-1}'$ とおく. κ_j ($j = 1, \dots, n-1$) を第 j 曲率という.

質問: 「平面曲線の基本定理」や「空間曲線の基本定理」は 4 次元以上の空間でも同様の定理が成り立つのでしょうか. また, 微分幾何学では 4 次元以上の空間について考えることは少ないのでしょうか.

お答え: 前半: はい. 後半: むしろ高次元を扱う場合が多いと思います.

質問: フレネ・セレの公式は 4 次元以上の多次元にも拡張できますか? お答え: はい.

質問: 問 5-2 は空間曲線のフルネ枠と曲線が常に同じ位置関係 (フルネ枠の原点近傍での様子が常に同じ) であることを示しているという解釈でよろしいでしょうか.

お答え: 曲率, 捩率がともに消えない場合, 大体そうです. 適当な「スケール」が曲率と捩率の値に相当します.

質問: 空間における閉曲線の回転数はどのようにカウントされるのでしょうか? (車のハンドルは右, 左ですが, 飛行機の操縦はもう少し複雑に見えます). お答え: 空間閉曲線の全曲率は一般に 2π の整数倍にはならないので, 平面曲線と同様に回転数を定義することはできません. “Fary-Milnor の定理” で検索してみよう.

質問: 捩率の大きさが大きければ大きいほど曲線は感覚的にどうなりますか? (図省略)

お答え: 書いていただいた図で正しいとおもいます. そのようなことを常螺旋線を例にして説明したのです.

質問: 捩率の図形的な意味がよく分からなかったので, もう 1 度教えてください. お答え: 講義資料 5, 問題 5-2.

質問: 捩率が連続でないような曲線はありますか? ありましたら具体的な例をお願いします. お答え: $\tau = -b' \cdot n$ だから b が微分可能でかつ連続でない曲線が例. ここでは, 曲線 $\gamma(s)$ は C^∞ -級としたので自動的に連続.

質問: 捩率はどうような経緯から考えだされた量ですか? お答え: 常螺旋 (つるまき線) を例にして述べたはず.

質問: 主法線の「主」とはどのような意味あいでしょうか. お答え: 一番曲がっている方向を示す法線.

質問: 空間の曲面 (原文ママ; 曲線?) で常に $\kappa(s) > 0$ と定義する理由がよくわかりませんでした.

お答え: 平面曲線では先に n が定義されるので $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$ となる κ は符号を含めてきまります. 一方, 空間曲線では, $n = \gamma''/|\gamma''|$ によって n を決めているので, $\gamma''(s) = |\gamma''(s)|n(s)$ となり, この係数 $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$ は正になります. $\gamma'' = 0$ となる点では n は定義されませんが, κ は 0 と約束します.

質問: 2 つの曲面の交わりとして曲線を表現とっていましたが, もし, その曲面が部分的に一致した場合はどうするのでしょうか? (もしくはそんなことは起こらない?)

お答え: 2 つの曲面が, その共有点で「独立」である必要があります. 曲面が $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ で与えられているとき, これらの共有点で $\text{rank} \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2$ が成り立っていれば「独立性」があると思われま (正確には陰関数定理).

質問: この授業では接線というものについて明確に定義していなかったように思います (僕のノートに抜けがあるだけかもしれませんが...). 接線とは何かということについて, 授業ないで先生が言っていた (僕の妄想かも知れませんが) ことを引用するなら, その点の近くで曲線を最もよく近似する直線ということになるかと思います. ここで疑問なのが, この陳述は幾何学の言葉で書かれているかということです. というのも僕には「近似」という言葉が解析の言葉に聞こえてしまうからです. 僕なりに答えを考えた所・もっとよい説明のしかたがある・「近似」は幾何の言葉である・そもそも接線というものが解析と幾何の間にたつ概念である, などが浮かんだのですが, 実際のところはどうなのでしょう? お答え: 「解析」と「幾何」の間に壁をつくるのが間違い. 幾何学の問題・問題意識, 解析学の問題・問題意識というものは確かにありますが, どちらの分野も趣向が違うだけで同じ数学です. 使う言葉は (とくに初等的な範囲では) 共通です.

質問: 毎回のあたりに書かれている数字はこの質問の点数ですか. 採点基準は? お答え: はい. 「ご意見」の項参照.

質問: 先週レポートをだしそびれてしまったのですが, どれくらい減点されますか?

お答え: 講義資料 1, 1 ページ目の下の方の「成績評価の方法」を参照.

質問: 特になし (2 名) お答え: me, too.

6 空間曲線の基本定理

空間曲線の基本定理

- 線形常微分方程式の基本定理 (この資料, 教科書 202 ページの定理 A-2.2)
- 空間曲線の基本定理

今回用いる事実 以下の事実を用いる。これは、付録 A-2 の「線形常微分方程式の基本定理」からの帰結である：

定理. 区間 I の点 $t_0 \in I$ を一つ固定する。区間 I で定義され、 n 次正方行列に値をとる C^∞ -級関数 $\Omega(t)$ が与えられたとき、 I 上で定義された行列値 C^∞ -級関数 \mathcal{F} で、

$$(6.1) \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列}$$

をみたすものがただひとつ存在する。

系. 上の定理の状況で、さらに n 次正方行列 A が与えられているとする。このとき、 I 上で定義された行列値 C^∞ -級関数 \mathcal{F}_A で、

$$(6.2) \quad \frac{d\mathcal{F}_A}{dt} = \mathcal{F}_A\Omega, \quad \mathcal{F}_A(t_0) = A$$

をみたすものがただひとつ存在する。

証明：(6.1) を満たす \mathcal{F} に対して $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}$ (行列の積) とおけば、それが求めるものである。