2016 年 11 月 17 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分 (Ver 2. 20161124)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は，解答用紙の所定の欄に，採点者が読みとり，理解できるように書いてください．
- 計算や下書きにはは余白や裏面および所定の計算用紙を使用してください（採点の対象とはしません）．
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です．
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し，正しいと思われる問題に直して解答してください．
- 答案は **11 月 24 日**の授業の際に返却いたします．当日出席しなかった方は，それ以降**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします．
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2016 年 11 月 30 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません．

指定用紙のみ持込可

問題 A [80 点]

次の文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{14}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ，下線をつけた部分に関する問題 a ∼ f に答えなさい．

- 弧長 s によりパラメータ表示された空間曲線

$$\gamma(s) = \bigl(x(s), y(s), z(s)\bigr) \qquad x,\ y,\ z \text{ は } \mathbb{R} \text{ の区間 } J \text{ で定義されたなめらかな関数}$$

に対して，$\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s)$ $({}' = d/ds)$ とおくと $\boldsymbol{e}(s)$ の大きさは $\boxed{1}$ であるから，各 $s \in J$ に対して $_{\mathbf{a}}$<u>$\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{e}'(s)$ は直交する</u>．曲線 γ の曲率 κ を s の関数として $\kappa(s) = \boxed{2}$ のように定義する．以下，κ が 0 にならない場合のみを考える．主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$，捩率 $\tau(s)$ を $\boldsymbol{n}(s) = \boxed{3}$, $\boldsymbol{b}(s) = \boxed{4}$, $\tau(s) = \boxed{5}$ と定義する．

- 各 $s \in J$ に対して，$\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ を列ベクトルとみなして並べてできる 3 次正方行列

$$\mathcal{F}(s) = \bigl(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\bigr)$$

を γ の（s における）フルネ枠とよぶ．とくに $_{\mathbf{b}}$<u>$\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(3)$</u> である[1]．フルネ枠は次の微分方程式を満たす：

$$(*) \qquad \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \boxed{6}\,\boldsymbol{e} + \boxed{7}\,\boldsymbol{n} + \boxed{8}\,\boldsymbol{b},$$
$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boxed{9}\,\boldsymbol{e} + \boxed{10}\,\boldsymbol{n} + \boxed{11}\,\boldsymbol{b},$$
$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boxed{12}\,\boldsymbol{e} + \boxed{13}\,\boldsymbol{n} + \boxed{14}\,\boldsymbol{b}.$$

この式をフルネ・セレの公式という．

裏面に続く

[1] SO(3) は実数を成分とする 3 次の直交行列のうち行列式が 1 であるものの全体を表す．

幾何学概論第一 定期試験 〔問題 2〕

問題 A (続き)

- フルネ・セレの方程式を用いて次のことを示すことができる．

  弧長によってパラメータ付けられた曲線 $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$ の曲率と捩率が一致するならば，ある $A \in \mathrm{SO}(3)$，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ が存在して $\gamma_2 = A\gamma_1 + \boldsymbol{q}$ とできる．

  実際，γ_j のフルネ枠をそれぞれ $\mathcal{F}_j$ $(j = 1, 2)$ とすると $_{\mathbf{c}}$ $\underline{(\mathcal{F}_2{}^t\mathcal{F}_1)' = O \text{ が成り立つ}}$．ただし O は 3 次の零行列で，${}^t\mathcal{F}$ は行列 $\mathcal{F}$ の転置行列を表す．

  したがって，$\mathcal{F}_2{}^t\mathcal{F}_1$ は s によらない定行列なのでそれを A とおくと $A \in \mathrm{SO}(3)$ である．すると $_{\mathbf{d}}$ $\underline{\mathcal{F}_2 = A\mathcal{F}_1 \text{ が成り立つ}}$ が，その第 1 列を見ると

  $$\gamma_2' = \boldsymbol{e}_2 = A\boldsymbol{e}_1 = A\gamma_1'$$

  である．ただし $\boldsymbol{e}_j$ （$j = 1, 2$）は γ_j の単位接ベクトルである．これから $_{\mathbf{e}}$ $\underline{\text{結論が得られる}}$．
  ここで示したことは，曲率と捩率が与えられた関数 κ，τ であるような曲線の一意性である．

- さらに，

  区間 J 上で定義されたなめらかな関数 κ，τ （$\kappa > 0$）が与えられたとき，弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma \colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率が κ，捩率が τ であるものが存在する

  ということも，$_{\mathbf{f}}$ $\underline{\text{フルネ・セレの方程式を用いて示すことができる．}}$

問題 a $\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{e}'(s)$ が直交することを示しなさい．

問題 b 各 $s \in J$ ごとにフルネ枠が SO(3) の要素であることを示しなさい．

問題 c 下線 **c** の文脈で $(\mathcal{F}_2{}^t\mathcal{F}_1)' = O$ が成り立つことを示しなさい．

問題 d 下線 **d** の文脈で $\mathcal{F}_2 = A\mathcal{F}_1$ が成り立つことを示しなさい．

問題 e 下線 **e** の文脈で「結論が得られる」ことを示しなさい．

問題 f 下線 **f** の上に与えた「あたえられた曲率・捩率をもつ曲線の存在」を示しなさい．

問題 B [20 点] 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ とその曲率 $\kappa(s)$ が

$$\gamma(0) = (0, 0), \qquad \frac{d\gamma}{ds}(0) = (1, 0), \qquad \kappa(s) = \frac{2}{1 + s^2}$$

を満たしているとき，次の問いに答えなさい：

(1) $\gamma(s)$ を s の式で具体的に表しなさい．

(2) $\gamma(s)$ の像はどのような形になるか，図示しなさい．

問題 C [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

おつかれさまでした ♡

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 1–5: 各 5 点; 6–8, 9–11, 12–14: 5 点ずつ

1	2	3	4	5
1	$\lvert\boldsymbol{e}'(s)\rvert$	$\boldsymbol{e}'(s)/\lvert\boldsymbol{e}'(s)\rvert$	$\boldsymbol{e}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$	$-\boldsymbol{b}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$

6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	κ	0	$-\kappa$	0	τ	0	$-\tau$	0

問題 a [5 点]

$\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s)=1$ の両辺を s で微分すると，

$$0=\boldsymbol{e}'(s)\cdot\boldsymbol{e}(s)+\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{e}'(s)=2\boldsymbol{e}'(s)\cdot\boldsymbol{e}(s)$$

だから $\boldsymbol{e}'$ と $\boldsymbol{e}$ は直交する．

問題 b [5 点]

定義から $|\boldsymbol{e}|=1$, $|\boldsymbol{n}|=1$．また，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{e}'$ と平行だから $\boldsymbol{e}$ と直交する．さらに $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ の両方に直交し，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{e}|\,|\boldsymbol{n}|\sin\frac{\pi}{2}=1$．したがって $\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基をなす．ゆえに行列 $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ は直交行列である．
さらにベクトル積の定義から $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ の行列式は正の値をとる．したがって $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})\in\mathrm{SO}(3)$．
後半は “$\det(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$” でもよい．

問題 c [5 点]

γ_1, γ_2 の共通の曲率，捩率をそれぞれ κ, τ とすると，

$$\mathcal{F}_1'=\mathcal{F}_1\Omega,\qquad \mathcal{F}_2'=\mathcal{F}_2\Omega$$

が成り立つ．ただし Ω は $(*)$ で与えた行列である．ここで Ω は交代行列，すなわち ${}^t\Omega+\Omega=O$ が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_2{}^t\mathcal{F}_1)'&=\mathcal{F}_2'{}^t\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2({}^t\mathcal{F}_1)'=\mathcal{F}_2'{}^t\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2{}^t(\mathcal{F}_1')=\mathcal{F}_2\Omega{}^t\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2{}^t(\mathcal{F}_1\Omega)\\&=\mathcal{F}_2\Omega{}^t\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2{}^t\Omega{}^t\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2(\Omega+{}^t\Omega){}^t\mathcal{F}12=\mathcal{F}_2O{}^t\mathcal{F}_1=O.\end{aligned}$$

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄（つづき）

問題 d [5 点]

$\mathcal{F}_1 \in \mathrm{SO}(3)$ だから ${}^t\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{-1}$．したがって $A = \mathcal{F}_2{}^t\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1^{-1}$ の両辺に右から $\mathcal{F}_1$ をかければ $\mathcal{F}_2 = A\mathcal{F}_1$ を得る．

問題 e [5 点]

A は定行列だから，$\bigl(\gamma_2(s) - A\gamma_1(s)\bigr)' = \mathbf{0}$．したがって $\gamma_2(s) - A\gamma_1(s)$ は s によらない定ベクトルなので，それを $\boldsymbol{q}$ とおくと

$$\gamma_2 = A\gamma_1 + \boldsymbol{q} \qquad A \in \mathrm{SO}(3), \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$$

となる．

計算スペース

学籍番号			-						氏名	

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 A の解答欄（つづき）

問題 f [15 点]

与えられた関数 κ, τ に対して式 $(*)$ のように行列 Ω を定める．すると，3 次正方行列に値をもつ関数 $\mathcal{F}$ に関する微分方程式 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$ は（$\mathcal{F}$ の各成分に関する）線形方程式である．今，κ, τ の定義域 J の点 $s_0 \in J$ を一つ固定すると，線形常微分方程式の基本定理より

$(**)$ $\qquad \mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}(s_0) = I$ をみたす滑らかな $\mathcal{F}\colon J \to$ 3 次正方行列全体

がただ一つ存在する．ただし I は 3 次単位行列である．
まず，各 $s \in J$ に対して $\mathcal{F} \in \mathrm{SO}(3)$ であることを示そう．Ω は交代行列だから，

$$(\mathcal{F}^t\mathcal{F})' = \mathcal{F}'^t\mathcal{F} + \mathcal{F}^t(\mathcal{F}') = \mathcal{F}\Omega^t\mathcal{F} + \mathcal{F}^t\Omega^t\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega + {}^t\Omega)^t\mathcal{F} = O$$

したがって $\mathcal{F}^t\mathcal{F}$ は定数行列なので

$$\mathcal{F}(s)^t\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s_0)^t\mathcal{F}(s_0) = I^tI = I$$

したがって $\mathcal{F}(s)$ は直交行列．直交行列の行列式は 1 または -1 であるが，$\det\mathcal{F}(s)$ は s の連続関数で $\det\mathcal{F}(s_0) = \det I = 1$ なので $\det\mathcal{F}(s) = 1$ でなければならない．したがって $\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(3)$ $(s \in J)$ が示された．
行列 $\mathcal{F}(s)$ の 3 つの列ベクトルを左から順に $\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ と書くと，$\mathcal{F}(s)$ が直交行列であることから，これらは正規直交系をなし，さらに $\det\mathcal{F}(s) = 1$ だから $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$ である．
いま

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$$

とおくと，これが求めるものである．このことを示す．γ の作り方から $\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s)$ は単位速度ベクトルを与えている．さらに，方程式 $(**)$ の形（$(*)$ の Ω の形）から $\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$ となる．$\kappa > 0$ だったから，γ の曲率と主法線ベクトルは

$$|\boldsymbol{e}'| = |\kappa\boldsymbol{n}| = \kappa, \qquad \frac{\boldsymbol{e}'}{|\boldsymbol{e}'|} = \frac{\kappa\boldsymbol{n}}{\kappa} = \boldsymbol{n}$$

であり，さらに $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$ は従法線ベクトルである．ここで再び $(**)$ の形から

$$\boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n} \qquad \text{なので，捩率は} \qquad -\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n} = \tau\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \tau$$

となる．

学籍番号			-						氏名	

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 B の解答欄 各 10 点

(1)

$\gamma'(s)$ は単位ベクトルだから $\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ となるなめらかな関数 $\theta(s)$ が存在する．これを用いると，$\kappa(s) = \det\bigl(\gamma'(s), \gamma''(s)\bigr) = \theta'(s)$ が成り立つ．$\gamma'(0) = (1,0)$ だから $\theta(0) = 0$ とすることができるので，

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\,du = \int_0^s \frac{2du}{1+u^2} = 2\tan^{-1} s \qquad \text{だから} \quad \tan\frac{\theta}{2} = s.$$

したがって

$$\cos\theta(s) = \frac{1-s^2}{1+s^2}, \qquad \sin\theta(s) = \frac{2s}{1+s^2}.$$

ここで $\gamma(s) = \bigl(x(s), y(s)\bigr)$ とおくと，$\gamma(0) = (0,0)$ だから

$$x(s) = \int_0^s \cos\theta(u)\,du = \int_0^s \frac{1-u^2}{1+u^2}\,du = \int_0^s \left(\frac{2}{1+u^2} - 1\right) du = 2\tan^{-1} s - s,$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\theta(u)\,du = \int_0^s \frac{2u}{1+u^2}\,du = \int_0^s \frac{d}{du}\log(1+u^2)\,du = \log(1+s^2).$$

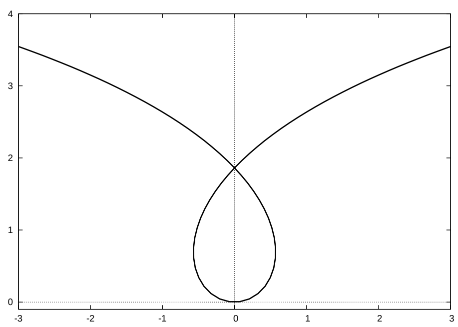
$$\underline{\gamma(s) = \bigl(2\tan^{-1} s - s, \log(1+s^2)\bigr).}$$

y 座標 $\log|\cos\tan^{-1} s|$ の絶対値は外れます（逆正接の定義を思い出そう）

(2)

$x(s)$ は奇関数 $y(s)$ は偶関数だから曲線は y 軸に関して対称

s		$s<-1$	-1	$-1<s<0$	0	$0<s<1$	1	$1<s$	
x'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
x	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}+1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	$-\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\log 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\log 2$	$\nearrow$	$+\infty$
dy/dx	0	$+$	$+\infty$	$-$	0	$+$	$-\infty$	$-$	0



学籍番号			-						氏名	

2016 年 11 月 17 日 10 時 45 分 ～12 時 15 分 (Ver 2. 20161124)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 5〕

問題 C [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 5 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	