

2016 年 12 月 1 日  
山田光太郎  
kotaro@math.titech.ac.jp

## 幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 1

### 講義概要

#### 重要なポイント

- <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2016/geom-2/> (この授業の公式ページ)
- <http://www.official.kotaroy.com/class/2016/geom-2/> (この授業のページ; ミラーサイト)
- <http://www.ocw.titech.ac.jp/> (東工大 OCW)
- 本館 2 階 231 (山田の部屋; 提出物ポストはここ)

科目名など 幾何学概論第二 (MTH.B212) (第 4 四半学期・木曜日・3/4 時限・理学部数学科)

担当者 山田光太郎 (理学院数学系) kotaro@math.titech.ac.jp

講義の概要 幾何学概論第一 (MTB.211) に続き, 主に以下の事項を学ぶ: 正則曲面のパラメータ表示, 第一基本形式・長さ・角度・面積, 第二基本形式・主曲率・ガウス曲率・平均曲率・測地線, ガウス-ボンネの定理, 曲面論の基本定理の意味. 古典的な, ユークリッド空間の曲面の微分幾何学の基本事項を身につけるとともに, 現代の微分幾何学を学ぶための準備を行う.

到達目標 3 次元ユークリッド空間内の曲面の微分幾何学の基本的な事項, とくに曲面の曲率の概念と, その幾何学的な性質を学ぶ.

- 曲面のパラメータ表示とパラメータ変換, パラメータによらない量の概念を知る.
- 曲面の曲率と曲面の形状の関係を知る.
- 曲面の大域的性質と局所的性質の具体例を知る.
- 理論の具体例を計算によって確認する.

教科書 梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』改訂版 (裳華房)

正誤表: <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html>

#### 成績評価の方法

- 授業日程の項にある定期試験を受験することが単位を得るための必要条件です。(十分条件ではありません). やむを得ない理由で試験を受けられない方は(可能な限り)事前に電子メールにて講義担当者までご連絡ください. 連絡なしに試験に欠席した方は, 原則として単位を得る権利を失います.
- 成績は主として定期試験の得点で決めます. 定期試験の成績が余りよくない場合(とくに定期試験だけでは不合格になってしまう場合)に以下の「提出物」の成績を考慮します.
- 授業が行われた後に
  - 講義資料にあげた問題の解答 (2 点)
  - 前回までの授業内容に対する質問あるいは講義・講義資料の誤りの指摘 (3 点)を提出してください. これを 1 回 5 点満点で評価します.

提出方法 所定の用紙に記入し、授業の翌週 月曜日の 10 時 00 分までに山田の部屋（本館 2 階 231）の前のポストに提出してください。整理の都合上、所定の用紙と異なる形式のものは受け付けません。

注意 いただいた質問にはできる限り回答します。なお、質問および回答の内容は公開しますのでご了承下さい。とくに質問の文章はできる限り原文を尊重しますので、誤字に気をつけてください。

おまけ 提出用紙には授業に関する感想、意見の記入欄を設けます。いただいた御意見は個人が特定できない形で公開いたします。なお、ご意見等の内容は成績に一切影響いたしません。

- いわゆる出席点はつけません。したがって出席もとりません。しかし、出席と関わりなく 授業時間中に連絡したことは伝わっているとみなします。いかなる理由であろうとも、欠席された方は、その授業時間で何かなされたか、という情報を次の回までに仕入れておいてください。
- 定期試験後、答案を返却し、成績を確認していただきます。採点、成績に関するクレーム・質問は期間を限って受け付けます。日程は、試験の際にお知らせ致します。なお、成績に関する議論は、提出されたもの（答案・質問）に書かれていることのみを材料とします。

## 授業日程

2016 年 12 月 01 日現在

		授業内容
12 月 01 日	1	曲面 (§6)
12 月 08 日	2	第一基本形式 (§7)
12 月 15 日	3	第二基本形式 (§8)
12 月 22 日	4	主方向・漸近方向 (§9)
01 月 12 日	5	測地線 (§10)
01 月 19 日	6	ガウス・ボンネの定理 (§§10–11)
01 月 26 日	7	展望
02 月 02 日	試	定期試験
02 月 09 日	8	定期試験返却とコメント（補講日）

## 1 曲面 (§6)

### 曲面の表示

- なめらかな 2 変数関数のグラフ  $z = f(x, y)$ .
- 陰関数  $F(x, y, z) = 0$ ; 特異点:  $\text{grad } F = (F_x, F_y, F_z) = \mathbf{0}$  となる点.
- パラメータ表示  $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ; 特異点:  $p_u$  と  $p_v$  が 1 次従属となる点.  
曲面の正則なパラメータ表示 (正則曲面) とは, 各  $(u, v)$  で  $p_u(u, v), p_v(u, v)$  が 1 次独立となること.

問 1.1. (1) なめらかな 3 変数関数  $F(x, y, z)$  に対して,  $S := \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$  を考える.  $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$  において  $F_z(P) \neq 0$  ならば,  $P$  の近傍  $U \subset \mathbb{R}^3$  と  $(x_0, y_0)$  の近傍  $D \subset \mathbb{R}^2$  およびなめらかな 2 変数関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して  $S \cap U = \{z = f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$  となることを示しなさい. このことを「 $S$  は  $P$  の近傍でなめらかな関数のグラフで表される」という.

- (2)  $\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義されたなめらかな写像  $p: U \ni (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$  を考える. 点  $(u_0, v_0)$  で  $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$  が一次独立であるとき,
- $(u_0, v_0)$  において  $(\det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}) \neq (0, 0, 0)$  であることを示しなさい.
  - 上の問のベクトルの第 3 成分が 0 でないとき,  $(u_0, v_0)$  の近傍  $V \subset U$ ,  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $D$  となめらかな関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して, [1]  $p|_V$  は単射, [2]  $p(V) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$  となる.

### パラメータ変換

定義 1.2.  $\mathbb{R}^2$  の領域  $D$  から  $\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  への写像

$$(1.1) \quad \varphi: D \ni (\xi, \eta) \mapsto (u, v) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \in U$$

が微分同相写像 diffeomorphism であるとは, [1]  $\varphi$  は全単射. [2]  $\varphi$  と  $\varphi^{-1}$  はともに  $C^\infty$ -級となること.

問 1.3. (1) 式 (1.1) の  $\varphi$  が微分同相写像ならば,  $D$  の各点で次が成立することを示しなさい:

$$(1.2) \quad J := \det \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \neq 0. \quad (J \text{ を } \varphi \text{ のヤコビ行列式 (Jacobian) という.})$$

- (2) 式 (1.1) の  $\varphi$  で, 全射かつ  $D$  の各点で (1.1) を満たし, 単射でないものの例を一つあげなさい.  
(3) 式 (1.1) の  $\varphi$  で全単射,  $C^\infty$ -級かつ  $\varphi^{-1}$  が  $C^\infty$ -級でない例を一つあげなさい.

問 1.4. 正則曲面  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  と, (1.1) の形の微分同相写像  $\varphi$  に対して  $\tilde{p}(\xi, \eta) := p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$  とおくと,  $\tilde{p}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  は正則な曲面のパラメータ表示を与えることを示しなさい. この  $\tilde{p}$  を「 $p$  からパラメータ変換  $\varphi$  で得られる」という. 誤解の恐れがないときは,  $\tilde{p}(\xi, \eta)$  を  $p(\xi, \eta)$  と書くことがある.

単位法線ベクトル 正則な曲面  $S$  のパラメータ表示  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $U \subset \mathbb{R}^2$  は領域) に対して  $P := p(u_0, v_0)$  ( $(u_0, v_0) \in U$ ) を一つ固定するとき,  $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$  は 1 次独立なベクトルである.

- $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$  が生成する 2 次元空間は, 曲面  $S$  の  $P$  における接平面に平行である.
- 零でないベクトル  $p_u(u_0, v_0) \times p_v(u_0, v_0)$  の向きは,  $S$  の  $P$  における接平面に垂直な方向を与える.

定義 1.5. 正則な曲面  $S$  のパラメータ表示  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して,

- $(u, v) \in U$  における (または  $P = p(u, v)$  における)  $S$  の単位法線ベクトルとは,  $P$  における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである.
- なめらかな写像  $\nu: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  が, パラメータ表示された曲面  $p$  の単位法線ベクトル場であるとは, 各  $(u, v)$  で  $\nu(u, v)$  が  $p$  の  $(u, v)$  における単位法線ベクトルを与えていることである.

問 1.6. (1) 曲面のパラメータ表示  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して,  $\nu(u, v) := \frac{p_u(u, v) \times p_v(u, v)}{|p_u(u, v) \times p_v(u, v)|}$  は単位法線ベクトル場を与えていることを確かめなさい.

(2)  $\tilde{p}$  を問 1.4 のように  $p$  からパラメータ変換で得られる曲面とすると, 次を示しなさい:

$$\frac{\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta}{|\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta|} = \varepsilon \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} \det \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

ただし, この等式の右辺は  $(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$  における値を, 左辺は  $(\xi, \eta)$  における値を表す.

(3)  $\hat{p}(u, v) = R p(u, v) + \mathbf{q}$  ( $R$  は 3 次の直交行列,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ ) とおくと, 次を示しなさい:

$$R \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \varepsilon \left( \frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|} \right) \quad \varepsilon = \det R.$$

面積 正則な曲面  $S$  のパラメータ表示  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $U \subset \mathbb{R}^2$  は領域) に対して, 有界閉集合  $\bar{V} \subset U$  をとるとき曲面の  $\bar{V}$  に対応する部分の面積は次で与えられる:  $A(\bar{V}) := \iint_{\bar{V}} |p_u(u, v) \times p_v(u, v)| du dv$ .

問 1.7. 曲面の面積はパラメータのとりかたによらないことをきちんと述べて示しなさい.

## 問題

1-1  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^3$  への滑らかな写像  $p(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$  について,

- (1)  $p_u$  と  $p_v$  が一次従属であるような  $\mathbb{R}^2$  の点  $(u, v)$  の集合を求めなさい.
- (2)  $p(u_1, v_1) = p(u_2, v_2)$  ( $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ ) となる  $\mathbb{R}^2$  の点の組  $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$  をすべて求めなさい.

1-2 単位球面の次のふたつのパラメータ表示 (定義域は適当に考えよ) の間の座標変換を与えなさい.

$$p(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \quad \tilde{p}(\xi, \eta) = \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{1 + \xi^2 + \eta^2} \right)$$

1-3 陰関数  $F(x, y, z) = 0$  で表示された曲面上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  で  $\operatorname{grad} F \neq \mathbf{0}$  が成り立つとき, その点における単位法線ベクトルは  $\pm (\operatorname{grad} F) / \|\operatorname{grad} F\|_{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)}$  であることを示しなさい.

1-4 関数  $f(x, y) = x^2 + y^2$  のグラフ (回転放物面) の  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  に対応する部分の面積を求めなさい.

1-5 平面上の長さ  $\mathcal{L}$  の閉曲線  $\gamma(s)$  ( $s$  は弧長) の重心とは,

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} \gamma(s) ds$$

で与えられる平面上の点である.

$xz$  平面の上半平面  $\{(x, z) \mid z > 0\}$  上の閉曲線  $\gamma(s)$  を  $x$  軸の回りに回転して得られる曲面の面積は,  $\gamma$  の重心が回転した道のりと  $\gamma$  の長さの積である. このことを示しなさい.