

2016年12月8日(2016年12月08日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 2

前回までの訂正

- 講義資料 1, 問題 1-1; $p(a_1) = p(a_2) (a_1 \neq a_2) \Rightarrow p(u_1, v_1) = p(u_2, v_2) ((u_1, v_1) \neq (u_2, v_2))$
 $(a_1, a_2) \Rightarrow ((u_1, v_1), (u_2, v_2))$
- 講義資料 1, 問題 1-2; 陰関数表示 $F(x, y, z) = 0$ で表示された滑らかな曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) における
 \Rightarrow 陰関数表示 $F(x, y, z) = 0$ で表示された曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) で $\text{grad } F \neq 0$ が成り立つとき,

授業に関する御意見

- お恥ずかしながら TeX は苦手です。手書き万歳!! メールでのレポート提出システムをご検討されているようですが、その場合、紙面の画像送付も化としていただけると大変たすかります。山田のコメント: 検討中。今学期は間に合いません。
- 板書の文字が大きくて分かりやすいです。山田のコメント: どうも。
- 先生の授業は明瞭採点でいいですね。山田のコメント: いいのだろうか。
- 問題の 1-3 と 1-5 の解答が知りたい。どうも上手くいかない。山田のコメント: はい。
- このあたりは解析概論の方でも学んだのですが、そのときはあいまいにしていた部分をもう 1 度再確認できたのでとてもよかったです。山田のコメント: それはよかった。
- 二次形式をちゃんと勉強し直そうと思った。山田のコメント: 1 年生の線形代数ではそこまで真面目には扱いませんよね。
- 今 Q もよろしくお願いします。/ 4Q もよろしくお願いします。山田のコメント: こちらこそ。
- これからもよろしくお願いします! 山田のコメント: こちらこそ。
- 暖かいと眠いです。山田のコメント: me, too.
- 特になし(講義の際に具体例が所々にあるとうれしいです) 山田のコメント: 今回は少しだけでしたね。
- 特になし。山田のコメント: me, too.

質問と回答

質問 1: 私は xyz 座標を書くとき左手系で書きがちなのですが、先生が言われていた右手系が自然とはなぜでしょうか。

お答え: ベクトルの外積を「 a, b に直交し、大きさは... , 向きは a から b へ右ねじを回すときの進行方向」と定め
なら, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ に対して $e_1 \times e_2 = (0, 0, 1) = e_3$ となるのは、座標系が右手系だから。

質問 2: x, y, z の 2 次式の陰関数表示で表せる図形は楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物線(原文ママ: 放物
面のことか), 双曲放物線(山田注: これも)(平面, 2 枚の平面, 空集合, 1 点)以外に存在しないのでしょうか。
各項の正負の条件や次数の条件で場合分けして行って示せそうな気がします。

お答え: いわゆる「固有な 2 次曲面」以外のものは全部尽くすのは面倒。たとえば $x^2 + y^2 = 0$ は直線。楕円面などの
分類は「2 次形式の標準化の問題, 線形代数の教科書に載っている」ということを授業中に説明しました。

質問 3: 正則曲面について, 楕円面, 楕円放物面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 双曲放物面のどれかに合同といわれました
が, この証明はどのようにしてされているのでしょうか。お答え: 正則曲面ではなく二次曲面。

質問 4: (x, y, z) の 3 次式 $= 0$ の場合, どんな図形を表すかについての一般論はありますか?

お答え: 良く知られているわけではないようです。「実三次曲面, 分類」で検索してみましょう。

質問 5: 正則なパラメータ表示は C^1 級でよいのに微分同相写像(パラメータ変換)は C^∞ 級でないといけないのはな
ぜでしょうか。お答え: 第一基本形式 (§7) を定義するには C^1 で十分ですが, 第二基本形式 (§8), ガウス曲
率, 平均曲率を定義するには C^2 が必要。さらに, ガウスの定理(式 (10.10)) が成り立つためには C^3 が必要。
このような状況毎に微分可能性を指定しなすのは面倒だから。

質問 6: なぜ $D \ni (s, t) \mapsto (u, v) \in U$ のパラメータ取り換えのヤコビ行列は $\begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$ なのでしょうか。転置した
 $\begin{pmatrix} u_s & v_s \\ u_t & v_t \end{pmatrix}$ ではダメですか? 転置しても行列式は変わらないので問題ないように思えます。

お答え： 行列式を考えるだけならどちらでもよいが、たとえば、テキストの式 (7.13) のようにヤコビ行列とその転置を掛けるようなことをするので、転置との区別をつけるべき。講義資料 2 も参照のこと。

質問 7： 講義資料では陰関数表示とパラメータ表示、両方の説明に特異点という言葉が登場しますが、この 2 つの概念は一致しますか。すなわち、曲面を陰関数表示したときの特異点はパラメータ表示したときも同じ点で特異点となる（逆も同様）ですか。

お答え： いいえ、曲線の場合 (§1) と同じことが起きます： $F(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$, $p(u, v) = \left(\frac{3u^2(1-u)}{3u^2-3u+1}, \frac{3u(1-u)^2}{3u^2-3u+1}, v \right)$ ($(u, v) \in \mathbb{R}^2$) は同じ曲面を与え、陰関数表示には特異点がありますが、パラメータ表示の方は特異点を持ちません。

質問 8： $\tilde{p}(\xi, \eta) = \left(\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{\xi^2+\eta^2-1}{1+\xi^2+\eta^2} \right)$ は \tilde{p}_ξ と \tilde{p}_η が 1 次独立ですが、 $(0, 0, 1)$ を含まないことが気になります。単位球面のパラメータ表示の中で正則かつ全ての点を含むものはありますか？そして、パラメータ表示をする時、定義域が領域 (open + connected) であるとおっしゃいましたが、なぜ領域でなければなりませんか。

お答え： 前半：ありません。なので、色々なパラメータ表示をとって補いあうことが必要、ということを受業で説明しました。後半：開でない、境界点での微分の扱いが面倒、連結でなければ連結成分に限ってしまえば良い。

質問 9： \mathbb{R}^2 の領域を定義域とした二次元球面のパラメータ付けが正則にならないのは、 \mathbb{R}^2 の領域と二次元球面が位相同型でないから、という理解で正しいですか。お答え：そうです。

質問 10： 球面のパラメータ表示 $\tilde{p}(\xi, \eta)$ はどういう時に使うと有用なのでしょう。それと、なぜ文字 ξ と η を使うのですか。お答え：授業では「複素平面に無限遠点を付け加えるときに用いる。複素解析の授業で学ぶ」ということを口走ったはず。文字は (u, v) と異なる、ペアな感じの文字を適当に選んだ。

質問 11： \mathbb{R}^4 上の 3 次元球面はどのようにパラメータづければよいのでしょうか？とくに各変数の範囲がよく分かりません。お答え：たとえば立体射影は 2 次元の場合と全く同様に作れますね。グラフ表示もパラメータ表示です。「緯度、経度」による表示のしかたは「高次元極座標」で検索してみましょう。

質問 12： $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ が球面という説明でしたが $F = 0$ でないと球面と断定できないのではないのでしょうか。お答え：「 $F(x, y, z) = 0$ が表す曲面を考える」の文脈で「 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ の場合」。

質問 13： 曲面の定義として関数 (原文ママ：写像のことか) $\tilde{p} = p(u, v)$ を曲面として定めるのか p による像を定めるのかどちらが一般的ですか。お答え：文脈による。区別が必要な場合は明記する。なお、この授業では \vec{p} という記号は使いません (\vec{OP} という使い方はします)。

質問 14： 関数 $z = f(x, y)$ が偏微分可能として、曲面のパラメータ表示 $p(u, v) = (u, v, f(u, v))$ を与えると $p_u(u, v) = (1, 0, f_u)$, $p_v(u, v) = (0, 1, f_v)$ となることから、 $p_u \times p_v = (-f_u, -f_v, 1) \neq \mathbf{0}$ 。よってグラフはこの条件下においてはいつでも正則といえるのでしょうか？お答え：そうです。曲線の場合と同じです。

質問 15： 面積の公式 (山田注：略) は解析学概論の授業ですでに習いました。お答え：どのように習いましたか？

質問 16： 解析学概論の時間では、 $\iint_{\Omega} |p_u \times p_v| du dv$ が曲面積の定義とされていたのですが、以前の授業では $\iint_{\Omega} |p_u \times p_v| du dv$ から面積が得られると表現されて、面積が別のところで定義され、球面積 (山田注：曲面積のことか) が $\iint_{\Omega} |p_u \times p_v| du dv$ と一致するというように聞こえたのですが、(私の写し間違いでなければ、黒板にも $\text{Area}(p(\Omega)) = \iint_{\Omega} |p_u \times p_v| du dv$ と := でなく = を使っていた) $\iint_{\Omega} |p_u \times p_v| du dv$ を定義とするか否かは人によってまちまちということですか。

お答え： そう。文脈に依存します。幾何学概論第一の講義資料 2、問 2.3 に「曲線の長さ」の定義らしきものがあり、それと道のりの公式が一致することを示す問題がありますが、曲面積の定義はもう少し複雑になるので、ここでは積分で与えた量を定義とするのが適切だと思います。

質問 17： 曲線論の際には曲率のもつ性質の一つとして曲率円を考えましたが、曲面論の場合は曲率球のようなものは扱うのでしょうか。お答え：一般には曲がり方が方向によって異なるので、あらゆる方向に曲がり方が同じである球面では情報が不足します。接触 2 次曲面をとることもありますが、ここでは深入りしません。

質問 18： 1-1 の問題で、最終的に答えに放物線が (1) と (2) の両方にでてくるのはたまたまですか。お答え：はい

質問 19： 問題 1-3 の冒頭に「 $F(x, y, z) = 0$ で表示された滑らかな曲面」とありさすが、この中の「滑らか」の定義は曲面 $\{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$ の各点で接平面が存在することですか？解析学の授業でパラメータ表示された曲面に対しては「滑らかである」であることを定義しましたが、幾何では「正則である」という概念がそれと同値であると考えていいですか？お答え：それでよい。この問題の文脈では「陰関数定理が使える状況」というつもり。

質問 20： 問題 1-5 において γ が閉曲線である、殊に閉じているという条件は要るのでしょうか。解答を作成している際に、この γ の性質を使った気がいたしません。お答え：そのとおり。

2 第一基本形式

曲面の接平面・接ベクトル空間． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u, v)$ 上の点 $P = p(u_0, v_0)$ において曲面に接するベクトルは

$$(2.1) \quad \mathbf{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

の形に表される．正則性の条件から (2.1) の形のベクトル全体は \mathbb{R}^3 の 2 次元線形部分空間を与える．これを曲面 $p(u, v)$ の P における接ベクトル空間・接平面とよび V_P と書く^{*1}．ベクトルの組 $\{p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)\}$ は，接平面の一つの基底を与える．

問 2.1. 曲面 $p(u, v)$ が曲面 $\tilde{p}(\xi, \eta)$ からパラメータ変換

$$(2.2) \quad u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta)$$

で得られるとき，

$$(2.3) \quad (\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta) = (p_u, p_v)J \quad \left(J := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つことを示しなさい．ここで p_u, p_v などは列ベクトル， (p_u, p_v) はそれらを並べた 3×2 行列，右辺の積は行列の積を表す．行列 J は変換 $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ のヤコビ行列とよばれる．

接平面と \mathbb{R}^2 との対応． いままでの状況で，曲面の点 P における接平面 V_P と \mathbb{R}^2 の間に線形同型

$$(2.4) \quad V_P \ni \mathbf{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が得られる．この第一成分，第二成分をそれぞれ

$$(2.5) \quad \begin{aligned} du: V_P \ni \mathbf{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0) &\mapsto \alpha \in \mathbb{R}, \\ dv: V_P \ni \mathbf{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0) &\mapsto \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

と書けば， du, dv は V_P から \mathbb{R} への線形写像である^{*2}．

問 2.2. 式 (2.2) のようなパラメータ変換で曲面を (ξ, η) によってパラメータ表示するとき，同様に V_P から \mathbb{R} への線形写像 $d\xi, d\eta$ を考えることができる．このとき

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} du = u_\xi d\xi + u_\eta d\eta \\ dv = v_\xi d\xi + v_\eta d\eta \end{cases}$$

が成り立つことを確かめなさい．ここで J は式 (2.3) で与えたヤコビ行列である．

2016年12月8日(2016年12月08日訂正)

^{*1} 記号 V_P はこの場での一時的なものである．一般的には $dp(T_{(u_0, v_0)}\mathbb{R}^2)$ などと書くべきだが，この記号の構成要素を説明するのが面倒なのでこのような記号を用いた．多様体を学んだあとで「定義域の接空間の，はめこみの微分写像による像」という文が通じると思う．

^{*2} 一般に \mathbb{R} 上の線形空間 V から \mathbb{R} への線形写像を線形形式または一次形式という．

問 2.3. 変数 (u, v) に関する C^∞ -級関数^{*3} $f(u, v)$ を考える. 式 (2.2) のようなパラメータ変換により $\tilde{f}(\xi, \eta) = f(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ と定めると,

$$(2.7) \quad \tilde{f}_\xi d\xi + \tilde{f}_\eta d\eta = f_u du + f_v dv$$

が成り立つことを確かめなさい.

問 2.3 の状況で, 誤解の恐れがないときは $\tilde{f}(\xi, \eta)$ を $f(\xi, \eta)$ と書いてしまうことがある. このとき (2.7) は $f_\xi d\xi + f_\eta d\eta = f_u du + f_v dv$ と書ける. いま

$$(2.8) \quad df := f_u du + f_v dv$$

とおき, これを f の微分, 全微分または外微分とよぶ. すると問 2.3 は「関数の微分はパラメータのとり方によらない」と言い換えることができる.

2 次形式 (線形代数の復習). 以下 V を \mathbb{R} 上の n 次元線形空間とする.

定義 2.4. 写像 $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ が対称双線形形式または 2 次形式であるとは (1) 任意の $v \in V$ に対して $b(v, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$, $b(\cdot, v): V \rightarrow \mathbb{R}$ がともに線形写像 (双線形性), (2) 任意の $v, w \in W$ に対して $b(v, w) = b(w, v)$ (対称性) をみたすことである.

例 2.5. 線形空間 V の内積とは, V の対称双線形形式 g で, 次の性質 (正値性) を満たすものである: 任意の $v \in V \setminus \{0\}$ に対して $g(v, v) > 0$.

問 2.6. 線形空間 V 上の対称双線形形式 b があたえられているとする. V の基底 $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\}$ をひと組とるとき,

$$b(v, w) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j b_{ij} \quad \left(v = \sum_{i=1}^n v_i a_i, \quad w = \sum_{j=1}^n w_j a_j, \quad b_{ij} := b(a_i, a_j) \right)$$

と書けることを確かめなさい. ここに現れる n 次対称行列 $B = (b_{ij})$ を, 対称双線形形式 b の基底 $\{a_j\}$ に関する表現行列という.

問 2.7. 問 2.6 の状況で,

$$V \ni v = \sum_{i=1}^n v_i a_i \mapsto \hat{v} := {}^t(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

により V と \mathbb{R}^n を同一視すると

$$b(v, w) = {}^t \hat{v} B \hat{w}$$

と書けることを確かめなさい.

問 2.8. 問 2.6, 2.7 に状況で, 別の V の基底 $\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n\}$ をとると, n 次正則行列 $J = (m_{ij})$ (基底変換行列) が存在して

$$\tilde{a}_j = \sum_{k=1}^n m_{kj} a_k, \quad \text{すなわち} \quad (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = (a_1, \dots, a_n) J$$

^{*3} ここでは, とくに断らない限り関数などの微分可能性は C^∞ を仮定する. 以後, しばしば C^∞ -級を省略する.

を満たす。このとき、対称双線形形式 b の基底 $\{\alpha_j\}$ に関する表現行列 B と $\{\tilde{\alpha}_j\}$ に関する表現行列 \tilde{B} は、関係式

$$\tilde{B} = {}^t J B J$$

を満たすことを確かめなさい。

第一基本形式。曲面のパラメータ表示 $p(u, v)$ は、3つの2変数関数の組 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ と考えられるから、全微分

$$dp = (dx, dy, dz) = p_u du + p_v dv$$

を考えることができる。とくに問 2.3 から dp はパラメータのとり方によらない*4。

定義 2.9. 曲面 $p(u, v)$ の第一基本形式とは

$$ds^2 := dp \cdot dp = (p_u du + p_v dv) \cdot (p_u du + p_v dv) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = (du, dv) \hat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

のことである。ただし

$$E = p_u \cdot p_u, \quad F = p_u \cdot p_v, \quad G = p_v \cdot p_v, \quad \hat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

E, F, G を第一基本量, \hat{I} を第一基本行列とよぶ。

問 2.10. 点 $P = p(u_0, v_0)$ を一つ固定し、第一基本量などはその (u_0, v_0) での値を考えるものとする。このとき次を確かめなさい：

- 第一基本行列 \hat{I} は、接平面 $V_P \subset \mathbb{R}^3$ の内積 (\mathbb{R}^3 の標準内積 “ \cdot ” の制限) の、 V_P の基底 $\{p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)\}$ に関する表現行列である。
- 式 (2.2) のパラメータ変換によるパラメータ表示 $p(\xi, \eta)$ の第一基本行列を $\tilde{\hat{I}}$ とすると $\tilde{\hat{I}} = {}^t J \hat{I} J$ である。ただし J は (2.3) のヤコビ行列である。
- 接平面 V_P 上のベクトル

$$v = \alpha p_u + \beta p_v, \quad w = \alpha' p_u + \beta' p_v$$

に対して

$$|v|^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = (\alpha, \beta) \hat{I} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$v \cdot w = \alpha\alpha' E + (\alpha\beta' + \beta\alpha') F + \beta\beta' G = (\alpha, \beta) \hat{I} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}.$$

- $|p_u \times p_v|^2 = EG - F^2$.

問 2.11. パラメータ表示された曲面 $p(u, v)$ に対して、 $\hat{p}(u, v) = R p(u, v) + \mathbf{b}$ (R は 3 次の直交行列, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$) とするとき、 p の第一基本量と \hat{p} の第一基本量が一致することを示しなさい。

*4 これまでは P を固定して考えていたが、以後、 $\omega := \alpha du + \beta dv$ の α, β は (u, v) の関数と考える。このとき ω を曲面上の 1 次微分形式とよぶ。

問題

2-1 曲面 $p(u, v)$ のパラメータ (u, v) が等温座標系であるとは, 第一基本量が $E = G, F = 0$ を満たすことである. このとき, さらにこのパラメータ表示からパラメータ変換で得られる同じ曲面のパラメータ表示 $\tilde{p}(\xi, \eta)$ で (ξ, η) が等温座標系であるためには, パラメータ変換がどのような条件を満たさなければならないか.

2-2 パラメータ表示された曲面

$$p(u, v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v) \quad (-\pi < u < \pi, v > 0)$$

を考える.

(1) p の第一基本量を求めなさい.

(2) 削除

(3) uv 平面上の曲線 $\gamma(t) = (1, t)$ ($\varepsilon \leq t \leq M$) に対応する曲面上の曲線 $\hat{\gamma}$ の長さ $\mathcal{L}_{\varepsilon, M}$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0, M \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_{\varepsilon, M}$$

を求めなさい.

(4) uv 平面上の曲線 $\{(u, v) \mid u^2 + \cosh^2 v = 4, v > 0\}$ に対応する曲面上の曲線と $\hat{\gamma}$ のなす角を求めなさい.

(5) uv 平面上の閉領域

$$D_{\varepsilon, \delta, M} := \{(u, v) \mid |u| \leq \pi - \varepsilon, \delta \leq v \leq M\}$$

に対応する曲面上の閉領域の面積 $A_{\varepsilon, \delta, M}$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0, \delta \rightarrow +0, M \rightarrow +\infty} A_{\varepsilon, M}$$

を求めなさい.