

2016年12月15日(2016年12月22日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 3

### 前回までの訂正

- 講義資料 2, 2 ページ, 質問 14:  $(-f_u, f_v, 1) \Rightarrow (-f_u, -f_v, 1)$
- 講義資料 2, 6 ページの問題 2-2: 小問 (2) を削除.
- 講義資料 2, 6 ページの問題 2-2 (5): 領域  $\Rightarrow$  閉領域 (2 箇所)

### 授業に関する御意見

- 今回は難しくなったような気がした. 山田のコメント: よかったね. 大学まで来て簡単なことばかりじゃつまらないよね.
- 第一基本量は曲面の角, 長さ, 面積など色々な所に現れ, たしかに“基本”量であると思いました.  
山田のコメント: そうね.
- ヤコビ行列と基底の取り替え行列の記号がどちらも  $J$  を使っていて (文脈からどちらを意味するかは分かるが) 混乱しそうになった. 山田のコメント: 基底  $(p_u, p_v)$  と  $(\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta)$  の間の基底変換行列がヤコビ行列なので, 同じ記号を使うことにした.
- おもしろくてよかったです. 山田のコメント: どうも
- ほとんど自分のメモを見ずに授業をされていて, すごいと思いました. 山田のコメント: 多分だれでもできる.
- 12/28 (水) 東京工業大学管弦楽団第 155 回定期演奏会@ミューザ川崎シンフォニーホール, 会場 17:30, 開演 18:30 です. ぜひ来てください. 山田のコメント: シベリウスですよ. 残念. 先約あり.
- 特にないです (2 件) 山田のコメント: me, too.

### 質問と回答

質問 1: 授業では, ある曲面が与えられたときにその接平面について解析しましたが, 4次元空間上の曲面について, 逆にその接空間が与えられることでその (想像するのが困難な) 4次元の曲面を解析することができるのでは, と思いました. この考え方は合っていますか?

お答え: 前回の授業の中で「解析する」とは具体的に何をやったことを指していますか? それがわからないので, あっているかどうかは判定できません. それから「4次元の曲面」言い方はこの授業での用語に適合していますか? たとえば  $\mathbb{R}^3$  内の曲面を「3次元の曲面」,  $\mathbb{R}^2$  内の曲線を「2次元の曲線」とは決して言っていなかったと思います.

質問 2: 今回取り扱った第一基本量は, 曲線で学習した曲率や捩率のように, 曲面の式を図示した際の図形の形状を決める要素とみなしてよいのでしょうか? あるいは第一基本量だけでは不十分なのでしょうか?

お答え: 「曲面の式を図示した際の形状」とは「曲面の形」のこと? 第一基本量を求めることは, 曲線の場合の「弧長パラメータをとる」作業に相当します. したがって曲率に相当するものはこの段階ではまだ出ていません. 今回の「第二基本量」と合わせて曲面が決まります (曲面論の基本定理, テキスト付録 B-9. ここでは深入りはしません).

質問 3: 第一基本形式の“基本”はどのような意味合いで使われているのですか?

お答え: 第二基本形式とともに曲面を決める量, というつもりだと思います.

質問 4: 曲面  $p(t) = p(u(t), v(t))$  上の各点における接ベクトルは  $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{dv}{dt} = p_u \frac{du}{dt} + p_v \frac{dv}{dt}$  であるから, その 2 乗は  $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ . そこで第 1 基本形式  $E du du + 2F du dv + G dv dv$  というものを考えるという流れだったと思いますが, この場合での第一基本形式の式のイミは, さしあたって  $p(t)$  が  $p(t + \Delta t)$  に動いた距離の 2 乗で,  $\Delta t \rightarrow 0$  とした極限と考えて OK ですか?

お答え: 曲面  $p(t)$  でなく, 曲面  $p(u, v)$  上の曲線ですね. 回答は, いいえ. 実際  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき距離は 0 になります.

質問 5: 今回定めた量から曲面のなにがわかるのでしょうか?

お答え: 問題 2-2, 曲面上の長さ, 角度, 面積などがわかります. ということを授業の最後でも述べたわけですが.

質問 6: 突然第一基本形式や第一基本量などができましたが, これらに幾何学的な意味はあるのでしょうか?

お答え: 長さや角度に幾何学的な意味がないと思いますか?

質問 7:  $ds^2 := dp \cdot dp$  ですが,  $s$  は何ですか? ただ  $dp^2 = dp \cdot dp$  にせずに  $ds^2$  (もしくは  $s$ ) を導入した理由はなんですか?

お答え:  $dp$  はベクトル量ですが  $ds$  は “スカラ” と思っています. 少しだけ離れた “2 点の距離” のつもり. どのみち正確な意味はもたないので “ $ds^2$ ” というひとつの熟語と思って下さい.

質問 8: 第 1 基本量は正則でない曲面に対しても考えてよいものでしょうか.  $\sqrt{EG-F^2}$  を積分して面積を求める際には不都合はなかったのですが, 特異点  $P$  では  $\dim V_P \leq 1$  や  $\det \hat{T} = 0$  となり, 正則な場合とはかなり異なる挙動で不安になります.

お答え: ですから特異点を考えるときは, 正則な曲面とは違った手段が必要になります. たとえば, テキストの付録 B-8 のあたりで曲線や曲面の特異点を考えていますが, この授業では主に正則な曲面を考えます.

質問 9: 問題 2-2 (4) についてです. 2 つの空間曲線のなす角はどう定義されますか? 交点が 1 つのとき, その点での速度ベクトル同士がなす角と定め, 交点が 2 つ以上の時は定義しない, といった風になるんですかね.

お答え: 交点が複数あるなら, 各々の交点毎になす角を定義するのがよいのでは?

質問 10: 曲面上の 2 曲線のなす角をはかるといふ行為は, 曲面の幾何学上で何か特別な意味を持つことなのでしょうか. 問題 2-2 で出てきたので気になりました.

お答え: 「(中学校で学んだ) 平面上の幾何学で 2 つの直線のなす角をはかる, という行為は, 平面の幾何学上で何か特別な意味を持つことなのでしょうか。」まず, この質問には答えられますか?

質問 11: (外) 微分  $df = f_u du + f_v dv$  における  $du, dv$  の意味がいまいち分かっていません. 講義資料の 3P では  $du, dv$  は成分へ射影する「線形写像」と書いてあります. これらはいわゆる「作用素」の一種ということでしょうか.

お答え: いわゆる, と言われてしまうと困るのですが「作用素」という語で何を指していますか? 「線形写像」という言葉は通じていますか?

質問 12: なぜ等温座標系は  $E = G, F = 0$  となるのでしょうか.

お答え: 問題 2-1 の記述をよく見ると, 「 $E = G, F = 0$  のとき等温座標系という」とありますね. すなわち, この条件が「等温座標系の定義」なんです. したがって「等温座標系は  $E = G, F = 0$  となる」のではなく「 $E = G, F = 0$  のとき等温座標系とする」のです. すなわち, ご質問の文はナンセンス.

質問 13: 問 2-1 で等温座標系の問題を扱いましたが, 等温と呼称される由来は何でしょうか? 教科書には「 $uv$  平面上のある点で交わる曲線は,  $E = G$  かつ  $F = 0$  なら  $P$  による像でも速度ベクトルのなす角不変」なる性質があったので, 等角座標系とかの方がピンと来る気がします.

お答え: 等角座標系, 共形座標系 a conformal coordinate system ということもあります. 等温座標系という言葉の由来は, テキスト 171 ページ.

質問 14: 問 2-1 の「等温座標系」というのは物理的意味を持っていそうな名前ですが, やはり物理由来の概念でしょうか.

お答え: 名前の由来はテキスト 171 ページ.

質問 15: 2-1 の結果の式から回転させたものはこの条件を満たしそうな気はしますが, それ以外にも条件を満たす変換はあるのでしょうか.

お答え: 実は条件は (2 つの可能性があるがその一方の条件は) 複素解析で現れるコーシー・リーマンの方程式なので複素平面上的正則関数もちいていくらでも等温座標系がつくれます.

質問 16: 等温座標系の幾何学的特徴を教えてください. お答え: テキスト 77 ページ.

質問 17: 曲面のパラメータが等温座標系であるとは幾何学的にどのような意味をもっているのでしょうか. また “等温” という用語にはどのような意味があつてつけられているのでしょうか.

お答え: 幾何学的意味はテキスト 77 ページ, 用語の意味は 171 ページ.

質問 18: 外微分があるということは内微分もあるんでしょうか? もしあればその定義についても教えてください.

お答え: そういう語はないと思います.

質問 19: 問題 2-2 の計算が上手くいかなかったので教えてください (特に極限のところ).

お答え: どこが上手く行かなかったのか, きちんと明示しましょう.

質問 20: 特になし. お答え: me, too.

### 3 第二基本形式

第二基本形式. 正則にパラメータ表示された曲面  $p(u, v)$  の単位法線ベクトル  $\nu(u, v)$  をとる. このとき

$$\begin{aligned} II &:= -dp \cdot dv = -(p_u \cdot \nu_u) du^2 - (p_u \cdot \nu_v + p_v \cdot \nu_u) du dv - (p_v \cdot \nu_v) dv^2 \\ &= L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = (du, dv) \widehat{II} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad \left( \widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

を第二基本形式,  $L, M, N$  を第二基本量,  $\widehat{II}$  を第二基本行列という.

問 3.1. 上の状況で  $-p_u \cdot \nu_u = p_{uu} \cdot \nu$ ,  $-p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u = p_{uv} \cdot \nu$ ,  $-p_v \cdot \nu_v = p_{vv} \cdot \nu$  となることを示しなさい. とくに, 次が成り立つ.

$$M = -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u.$$

問 3.2. 曲面  $p(u, v)$  が曲面  $\tilde{p}(\xi, \eta)$  からパラメータ変換

$$(3.1) \quad u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta)$$

で得られるとき,  $\tilde{\nu}(\xi, \eta) = \nu(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$  は  $\tilde{p}$  の単位法線ベクトルを与える. この単位法線ベクトルに対して  $\tilde{p}$  の第二基本行列を  $\widetilde{II}$  とすると

$$(3.2) \quad \widetilde{II} = {}^t J \widehat{II} J \quad \left( J = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つことを確かめなさい.

問 3.3. 曲面  $p(u, v)$  の単位法線ベクトルを  $\nu(u, v)$  とする. 直交行列  $R$  と定ベクトル  $\mathbf{a}$  に対して

$$\hat{p}(u, v) := Rp(u, v) + \mathbf{a}, \quad \hat{\nu} := R\nu$$

とおくと  $\hat{\nu}$  は  $\hat{p}$  の単位法線ベクトルで,  $\hat{\nu}$  に対する  $\hat{p}$  の第二基本型式  $\widehat{II}$  は  $p$  の第二基本型式と一致することを示しなさい.

ワインガルテン行列. 曲面  $p(u, v)$  の単位法線ベクトル  $\nu(u, v)$  を一つ固定し, 第一基本行列  $\widehat{I}$ , 第二基本行列  $\widehat{II}$  を考える.

問 3.4. (1)  $\widehat{I}$  は正則であることを示しなさい. (2)  $\widehat{I}$  の固有値は正の実数であることを示しなさい.

定義 3.5.  $A := \widehat{I}^{-1} \widehat{II}$  をワインガルテン行列という.

定理 3.6 (ワインガルテンの公式, テキスト 85 ページ, 命題 3.5<sup>\*1</sup>).  $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$ .

証明. 単位法線ベクトル  $\nu$  は単位ベクトルだから,  $\nu \cdot \nu = 1$  なので  $\nu \cdot \nu_u = \nu \cdot \nu_v = 0$ . したがって,  $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ ,  $\mathcal{G} := (\nu_u, \nu_v, \nu)$  をそれぞれ 3 次の正方行列と見なすと

$${}^t \mathcal{F} \mathcal{G} = \begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v & p_u \cdot \nu \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v & p_v \cdot \nu \\ \nu \cdot \nu_u & \nu \cdot \nu_v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L & -M & 0 \\ -M & -N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\widehat{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^t \mathcal{F} \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

2016 年 12 月 15 日 (2016 年 12 月 22 日訂正)

\*1 テキストの証明は誤り. 正誤表を参照してください.

なので

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= {}^t\mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} -\widehat{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}) {}^t\mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} -\widehat{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{F}({}^t\mathcal{F}\mathcal{F})^{-1} \begin{pmatrix} -\widehat{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F} \begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\widehat{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{F} \begin{pmatrix} -\widehat{I}^{-1}\widehat{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{F} \begin{pmatrix} -A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この等式の第 1 列と第 2 列が結論の式である . □

ガウス曲率・平均曲率 .

問 3.7. 曲面  $p(u, v)$  からパラメータ変換 (3.1) によって得られる曲面  $\tilde{p}(\xi, \eta)$  のワインガルテン行列を  $\tilde{A}$  は  $p(u, v)$  のワインガルテン行列  $A$  と (3.2) のヤコビ行列を用いて

$$(3.3) \quad \tilde{A} = J^{-1}AJ$$

と表されることを確かめなさい . さらに  $A$  の固有値はパラメータのとり方によらないことを示しなさい .

問 3.8. 問 3.2 の状況で  $\hat{p}$  のワインガルテン行列は  $p$  のワインガルテン行列と一致することを示しなさい .

定理 3.9 (テキスト 86 ページ, 定理 8.7; 90 ページ, 問題 1). ワインガルテン行列の固有値は実数である .

定義 3.10. ワインガルテン行列  $A$  の固有値  $\kappa_1, \kappa_2$  を曲面の主曲率 ,

$$K := \kappa_1\kappa_2 = \det A, \quad H := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$$

をそれぞれガウス曲率, 平均曲率という .

問 3.11. (1) 平面の主曲率は 2 つとも 0 で, ガウス曲率, 平均曲率はともに 0 になることを示しなさい .

(2) 半径  $r$  ( $r > 0$ ) の球面の単位法線ベクトルを球面の外向きにとるとき, ガウス曲率は  $1/r^2$ , 平均曲率は  $1/r$  となることを示しなさい .

(3) 正の定数  $r$  に対して  $p(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$  は半径  $r$  の円柱面を与える . この曲面の主曲率, ガウス曲率, 平均曲率はそれぞれ  $\pm 1/r$  と  $0, 0, \pm 1/(2r)$  であることを示しなさい . 複号は単位法線ベクトルの選び方による .

## 問題

3-1 曲面  $p(u, v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$  ( $|u| < \pi, v > 0$ ) の主曲率, ガウス曲率, 平均曲率をそれぞれ求めなさい .

3-2 パラメータづけられた曲面  $p(u, v)$  の単位法線ベクトルを  $\nu$  とするとき ,

$$\widehat{\text{III}} := \begin{pmatrix} \nu_u \cdot \nu_u & \nu_u \cdot \nu_v \\ \nu_v \cdot \nu_u & \nu_v \cdot \nu_v \end{pmatrix}$$

を第三基本行列, その各成分を第三基本量という . 次を示しなさい :

(1)  $\det \widehat{\text{III}} = K^2(EG - F^2)$ . ただし  $K$  はガウス曲率,  $E, F, G$  は第一基本量である .

(2)  $\widehat{\text{III}} - 2H\widehat{\text{II}} + K\widehat{\text{I}} = O$ . ただし  $H$  は平均曲率,  $\widehat{\text{I}}, \widehat{\text{II}}$  はそれぞれ第一基本行列, 第二基本行列である .