2016 年 12 月 22 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 4

お知らせ

- 2016 年の講義は今回で終了，次回は 2017 年 1 月 12 日です．良いお年をお迎えください．

前回までの訂正

- 講義資料 3, 3 ページ，3 行目（II の定義式）：$-(p_v \cdot p_v)\,dv^2 \Rightarrow -(p_v \cdot \nu_v)\,dv^2$

授業に関する御意見

- テキストの正誤表を見てみたら，想像以上に誤りが多くて驚きました．数学についての本に，あれくらいの誤りがあるのはめずらしくないのですか． **山田のコメント：** ごめんなさい．結構多いですよね．他の本について，定量的にはよくわかりませんが，結構間違いがあります．
- 次回，第二基本量によって図形がどう変換するのかという授業が行われるのが楽しみです． **山田のコメント：** たいしたことはしません．
- 問 3.1 の計算がとてもハードでしたが，最後はとてもきれいになってよかったです! (やっぱり受験生のときに比べて計算力とスピードが落ちた気がします...) **山田のコメント：** 受験生ってすごいね．一方，経験を積むと間違えるチェックポイントがわかるようになったりします．
- ν の書き方について，特異点のくだりは大変面白かった． **山田のコメント：** そう?
- ちなみに来年の管弦楽団の春の定期演奏会はブラームス Symphony 1 番やります@目黒パーシモンホール, 5/27 (土) です．こちらもぜひ．コンマスやります． **山田のコメント：** ぶらいちですか．2 楽章楽しみですね．

質問と回答

質問 1： ds^2 は曲面の弧長（原文ママ：曲面上の曲線の弧長に関係する，と言った），II は曲面の曲がり具合と授業で言われてましたが，では III は?

質問 2： 適当な条件の下で $\widehat{I}$ と $\widehat{II}$ から曲面が唯一に定まると言っていましたが，問題 3-2 の第三基本量というのは曲面のどの性質を決定するのですか． $\widehat{III}$ は $\widehat{I}$ と $\widehat{II}$ の情報のみで表されるので新しい情報を含むとは思えません．

質問 3： 第一基本量と第二基本量で曲面は決定するならば，問題 3-2 の第三基本量を考える理由は何ですか．なぜ「基本」と名前がついているのでしょうか．

質問 4： 問 3-2 にある第三基本量はどのような幾何学的量を表現することができるのでしょうか? （第一基本量は弧長と面積，第二基本量は曲率でしたね）．

質問 5： 第一基本型式と第二基本型式から曲面を決定できるということでした．では第三基本型式を考えることによって，曲面のどのような性質を決定することができますか?

質問 6： 問 3-2 を見ると，第三基本型式は，第一基本型式と第二基本型式が決まれば自動的に決まる量のようですが，第三基本型式を用いて議論した方が見通しがよくなるような問題はあるのでしょうか．

お答え： パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu(u,v)$ と書くと，各 (u,v) 毎に $\nu(u,v)$ は $\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |\boldsymbol{x}| = 1\}$ の点を与えます．このようにして得られる写像 $(u,v) \mapsto \nu(u,v) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を**ガウス写像**とよびます．これは「曲面の方向」を与える写像となるのですが，ν を $\mathbb{R}^3$ への写像と思う（曲面と思う）ことが出来ます．この「ガウス写像の第一基本型式」が曲面の第三基本型式です．もちろん，問題 3-2 のように，正則な曲面の第一基本型式，第二基本型式から第三基本型式は決まってしまうので，新しい情報を持っているわけではないのですが，場合によってはこれを考えると便利なケースもあります（この授業では深入りしません）．

我々が考えているケース（正則な曲面）から少し離れますが，次のような例を考えましょう：

$$p(u,v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v) \qquad \bigl((u,v) \in \mathbb{R}^2\bigr).$$

問題 3-1 と同じ例ですが，(u,v) の定義域を広げています．この曲面は $\{(u,v) \,|\, v = 0\}$ に特異点をもちます．平均曲率は $2H = -\sinh v + \frac{1}{\sinh v}$ となり，特異点集合 $\{v = 0\}$ 上で定義されませんが,

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2, \quad I\!I = -\operatorname{sech} v \tanh v (du^2 - dv^2), \quad I\!I\!I = \tanh^2 v\, du^2 + \operatorname{sech}^2 v\, dv^2$$

となり，これらは $v = 0$ でも意味を持ちます．この場合 H が $v = 0$ で定義されていないので，第三基本型式は第一基本型式，第二基本型式から決まる，というわけにはいきません．ちなみに，この場合，第一基本型式と第三基本型式を足すと，$ds^2 + I\!I\!I = du^2 + dv^2$ と，平面の第一基本型式と同じものが出てきます．

質問 7： 単位法線ベクトルの向きのとり方によって主曲率や平均曲率の符号が変わりますが，とる向きはどちらでもよいのでしょうか．あるいは球面なら外向きに取るなどある程度決まりみたいなものはありますか?

お答え： ありません．パラメータ表示 $p(u,v)$ に対して $(p_u \times p_v)/|p_u \times p_v|$ を「uv 平面の向きに同調した単位法線ベクトル」ということもあります．曲面や多様体の「向き付け」に関係することですが，いまは深入りしません．

質問 8： ガウス曲率 $K = \det A = \det \widehat{I}^{-1} \det \widehat{I\!I} = \dfrac{\det \widehat{I\!I}}{\det \widehat{I}} = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$ と簡単にできたのですが，平均曲率や主曲率は他の求め方はないのでしょうか.

お答え： ワインガルテン行列 A は

$$A = \widehat{I}^{-1} \widehat{I\!I} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix}$$

だから

$$2H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}.$$

主曲率は A の固有値だが，固有多項式は 2 次式なので，根の公式を用いて

$$\frac{1}{2(EG - F^2)} \left((GL - 2FM + EN) \pm \sqrt{(GL - 2FM + EN)^2 - 4(LN - M^2)(EG - F^2)} \right).$$

質問 9： 問 3-1 において，ガウス曲率 $K = -1$ になったことは何か特別なことを意味するのでしょうか?

お答え： はい．ガウス曲率が一定な曲面にはさまざまな幾何学的な意味があります．とくにガウス曲率が負の定数であるような曲面は，非ユークリッド幾何学の局所的なモデルを与えています．講義で少し話すかも知れません.

質問 10： 問 3-2 を解いていると $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ としたくなりますね.

お答え： そうなっていますが.

質問 11： $ds^2 = dp \cdot dp = (du, du)\, \widehat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$, $I\!I = -dp \cdot d\nu = (du, du)\, \widehat{I\!I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$, $I\!I\!I = d\nu \cdot d\nu = (du, du)\, \widehat{I\!I\!I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ と表記してよいですか? **お答え：** よい.

質問 12： ガウス曲率や平均曲率を第一基本量のみを用いて表すことはできますか.

お答え： ガウス曲率はできる．テキストの式 (11.3)．一方，平均曲率はできない．実際 $p_1(u,v) = (u, v, 0)$, $p_2(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ を考えると，第一基本型式はともに $du^2 + dv^2$ だが平均曲率が異なる.

質問 13： ワインガルテン行列 A の主曲率 κ_1, κ_2 に対し，ガウス曲率を $\kappa_1\kappa_2$ でなく $\sqrt{\kappa_1\kappa_2}$ とすれば K は κ_1 と κ_2 の相乗平均，平均曲率 H は相加平均になり，うまくまとまると考えたのですが，どうして $K = \kappa_1\kappa_2$ と定義したのでしょうか.

お答え： その定義では K が実数にならないことがあるからです．実際，問題 3-1（あなたはこれを解いていますよね）では $\kappa_1\kappa_2 = -1$ となるので $\sqrt{\kappa_1\kappa_2}$ は i か $-i$ になります．言葉ですが「ワインガルテン行列 A の主曲率 κ_1, κ_2」はおかしい．「ワインガルテン行列 A の固有値 κ_1, κ_2」または「主曲率 κ_1, κ_2」というべき.

質問 14： 行列の固有値（ないしはその平均や積）が曲面の曲がり具合を表すというのが直感的にわかりにくいです．どういった経緯（発想）でこれを用いて曲がり具合を表そうとしたのでしょうか.

お答え： 曲面上の曲線の曲率を考える（今回やります)．ちなみに，直感は数式のあとからついてくることもあります.

質問 15： 曲線も曲面もベクトルの法線（原文ママ：法線ベクトルのこと？）をとることによって，図形の形を決める数値をとり出しましたが，これは 3 次元までで限定されてしまう方法なのでしょうか.

お答え： いいえ．$\mathbb{R}^{n+1}$ の中の n 次元の図形を考えれば同じことが言えます．接空間が n 次元なので，それに直交する方向が一つだけ定まるというのが鍵です.

4 主方向・漸近方向

■接成分，法成分． パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ を固定する．

$$\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \qquad (V_{\mathrm{P}} \text{ は } \mathrm{P} = p(u_0,v_0) \text{ における曲面の接平面}, \ \nu_{\mathrm{P}} = \nu(u_0,v_0)) \tag{4.1}$$

と直和分解できる．ただし $\nu(u,v)$ は p の単位法線ベクトル．したがって任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ は

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \qquad ([\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} \in V_{\mathrm{P}}, [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}) \tag{4.2}$$

と一通りに分解することができる．

問 4.1. 式 (4.2) において $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$, $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$ であることを示しなさい．

■曲面上の曲線． パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ と，uv-平面上の曲線 $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ に対して，空間曲線 $\hat\gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ は曲面上の曲線を与える．

問 4.2. 次を確かめなさい．

- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ の $\mathrm{P} := \hat\gamma(t_0)$ における速度ベクトルは次で与えられる．
$$\dot{\hat\gamma}(t_0) = \dot u(t_0) p_u(u_0,v_0) + \dot v(t_0) p_v(u_0,v_0) \qquad (u_0,v_0) = \big(u(t_0), v(t_0)\big).$$
- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(s) = p\big(u(s), v(s)\big)$ のパラメータ s が弧長であるための必要十分条件は
$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$
である．ただし E, F, G は p の第一基本量で，$(u,v) = \big(u(s), v(s)\big)$ で値をとるものとする．

■法曲率． 曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P} = p(u_0,v_0)$ を固定する．$\hat\gamma(s) = p\big(u(s), v(s)\big)$ を，$\mathrm{P} = \hat\gamma(s_0)$ となる曲面上の曲線で s はその弧長パラメータとする．このとき，

$$\gamma''(s_0) = \boldsymbol{\kappa}_g + \boldsymbol{\kappa}_n, \qquad \boldsymbol{\kappa}_g := [\gamma''(s_0)]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\kappa}_n := [\gamma''(s_0)]^{\mathrm{N}} = \kappa_n \nu_{\mathrm{P}}, \qquad \kappa_n = \gamma''(s_0)\cdot\nu_{\mathrm{P}}$$

とおき，$\boldsymbol{\kappa}_g$，$\boldsymbol{\kappa}_n$，κ_n をそれぞれ曲線 $\hat\gamma$ の P における**測地的曲率ベクトル**，**法曲率ベクトル**，**法曲率** という．

問 4.3. 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\hat\gamma(s) = p\big(u(s), v(s)\big)$ の $\mathrm{P} = \hat\gamma(s_0)$ における法曲率は

$$\kappa_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \tag{4.3}$$

である．ただし L, M, N は p の第二基本量の $(u,v) = \big(u(s_0), v(s_0)\big)$ での値とする．また，弧長とは限らないパラメータで表された曲線 $\hat\gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ $(\mathrm{P} = \gamma(t_0))$ の P における法曲率は次で与えられる：

$$\kappa_n = \frac{L(\dot u)^2 + 2M\dot u\dot v + N(\dot v)^2}{E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2}. \tag{4.4}$$

2016 年 12 月 22 日

式 (4.4) から，点 P における曲線の法曲率は $(\dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0))$ の方向のみ，すなわち $\hat{\gamma}$ の接線の方向のみに依存する．したがって，次の $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は well-defined である：

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \text{ 点 P で速度 } \boldsymbol{v} \text{ をもつ曲面上の曲線の P における法曲率} \qquad (\boldsymbol{v} \in V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\}). \tag{4.5}$$

命題 4.4 (テキスト 94 ページ，定理 9.1)**.** 曲面 p の $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における接ベクトル $\boldsymbol{v} \in V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，P を通り，ν_{P} と $\boldsymbol{v}$ に平行な平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ をとり，この平面と曲面の交線を，P における速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるような $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線 σ とみなす．このとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は σ の P における（平面曲線としての）曲率と一致する．ただし，$\{\boldsymbol{v}, \nu\}$ が $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の正の基底になるように $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の向きを定めておく．

問 4.5. 式 (4.5) の写像 $\kappa_n \colon V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{R}$ は，次を満たすことを確かめなさい：

$$\kappa_n(\tau\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v}) \qquad (\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \qquad \text{とくに} \quad \kappa_n(-\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v}). \tag{4.6}$$

命題 4.6 (テキスト 97 ページ，命題 9.3)**.** 法曲率 $\kappa_n \colon V_{\mathrm{P}} \to \mathbb{R}$ の最大値・最小値は P における主曲率である．

点 P における 2 つの主曲率が一致するとき，P を**臍点**（せいてん）という．点 P が臍点でないとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = \kappa_j$ $(j = 1, 2)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}_j \in V_{\mathrm{P}}$ の方向を，P における主曲率 κ_j に対応する**主方向**と呼ぶ．

命題 4.7 (テキスト 97 ページ)**.** 曲面 $p(u, v)$ の臍点でない点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における主曲率 κ_j に対応する主方向 $\boldsymbol{v}_j$ を $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_u(u_0, v_0) + \beta_j p_v(u_0, v_0)$ と表すと，${}^t(\alpha_j, \beta_j)$ は P におけるワインガルテン行列 A_{P} の，固有値 κ_j に対応する固有ベクトルである．

■漸近方向．

問 4.8. 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における曲面のガウス曲率が負であるとき，次を確かめなさい：

- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる方向 $\boldsymbol{v}$ がちょうど 2 つ存在する（**漸近方向**; テキスト 97 ページ，命題 9.8）．
- 曲面の接平面（点 P を通る平面と見なす）と曲面との共通部分は P の近くで P で交わる 2 つの曲線となる．これらの曲線の P における接ベクトルは漸近方向をあたえる（テキスト 100 ページ，定理 9.9）．
- 2 つの漸近方向は，主方向で 2 等分される（テキスト 101 ページ，命題 9.10）．

問題

4-1 曲面 $p(u, v)$ 上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ の各点 $\hat{\gamma}(t)$ が臍点でなく，その点における速度ベクトル $\dot{\hat{\gamma}}(t)$ が主方向をあたえているとき，**曲率線**という．$\hat{\gamma}(t)$ が p の曲率線であるとき，曲面

$$q(t, s) := p\bigl(u(t), v(t)\bigr) + s\nu\bigl(u(t), v(t)\bigr)$$

のガウス曲率を求めなさい．ただし $\nu(u, v)$ は曲面 p の単位法線ベクトル場である．

4-2 曲面 $p(u, v)$ 上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ の各点 $\hat{\gamma}(t)$ において $\dot{\hat{\gamma}}(t)$ が漸近方向であるとき，$\hat{\gamma}(t)$ を**漸近曲線**という．とくに各 u 曲線，v 曲線が漸近曲線であるとき，(u, v) を**漸近線座標**とよぶ．

(1) パラメータ (u, v) が漸近線座標であるための必要十分条件は，第二基本量が $L = 0, N = 0, M \neq 0$ を満たすことである．これを示しなさい．

(2) 曲面 $p(u, v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$ $(v > 0)$ のパラメータを変更して漸近線座標で表示しなさい．