2017 年 1 月 12 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 5

お知らせ

- 遅くなりましたが，2017 年あけましておめでとうございます．
- 次回 1 月 19 日に定期試験の予告を行います．皆様お誘い合わせの上お越しください．

前回までの訂正

- 講義資料 4, 4 ページ，問 4.8 の 4 行目：（テキスト 100 ページ，定理 9.9）⇒ （テキスト 99 ページ，定理 9.9）
- 講義資料 4, 4 ページ，問題 4-2，2 行目：とくに各 u 曲線，v 曲線が ⇒ とくにガウス曲率が負で，各 u 曲線，v 曲線が

授業に関する御意見

- 今回はとても授業が速かったです．　**山田のコメント：** Sorry.
- 先日いらっしゃっていた（12/19（月））解析の授業参観は楽しかったですか．　**山田のコメント：** はい．
- $\dot{\hat{\gamma}}$ のように ^ の上に ˙ をつけると少し見にくいですね．　**山田のコメント：** そうですね．
- パラメータを取り替えたときの第一，第二基本行列とワインガルテン行列の説明について，それぞれ二次形式，線形形式（原文ママ：線形変換？）の表現行列だから，という説明はよく納得できた．　**山田のコメント：** よかった．
- 今年はありがとうございました．来年もよろしくお願いします．（これが公開されている頃には「明けましておめでとうございます.」ですね）　**山田のコメント：** 明けましておめでとうございます．

質問と回答

質問 1： 法曲率のイメージがうまくつかめず，曲率線と漸近曲線のイメージもいまいちつかめなかったので，もう少し例が欲しいです．

お答え： いまいち，というのは「どこまでつかめていて，どこからダメ」なのでしょうか．そのあたりをきちんと自己評価して質問の文章に起こしてください．ところで「定義」はちゃんと言えますか？それがいえないでイメージのみをつかむのは無意味と思います．法曲率や曲率線の意味は，その定義にしたがってたとえば「円柱面」の法曲率，主方向，曲率線を計算してみるとよくわかります．漸近曲線については問題 4-2 が例ですね．

質問 2： 4-1 の q は曲線 $\hat{\gamma}$ に対してどのような鏡面となっているのでしょうか？式からはイメージしづらいです．

お答え： テキスト 241 ページ，図 B-6-1 の図．

質問 3： 漸近方向は，$\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における曲面のガウス曲率が負のときしか定義されないですか（問 4.8）

お答え： ガウス曲率が正の場合は定義されません．実際，法曲率の最大値と最小値が同符号になるので，法曲率が 0 となる方向はありません．ガウス曲率が 0 かつ臍点でない場合は，法曲率の最大値が正，最小値が 0，または最小値が負，最大値が 0．このときは，法曲率が 0 になるのは主曲率 0 に対する主方向のみなので，漸近方向はただ一つ．漸近方向が 2 つあるのはガウス曲率が負のときのみ．

質問 4： 「曲面にガウス曲率が負となる点付近で助変数をうまくとりかえることで，u 曲線と v 曲線がすべて漸近方向を向くようにできる」とあるが，これはどのように証明されるのでしょうか．また，助変数のとりかえは曲面によって異なるのでしょうか．

お答え： 前半：テキストの付録 B-5．後半：「曲面毎に同じとりかえ」とはどんなもののことをいうのでしょう．「漸近線座標をとる」という手続きを共通な手続きと思えばどの曲面でも同じ．その際の計算の仕方の細部までみると違

うかもしれない（と言う意味で質問がナンセンス）.

質問 5： ここに出て来る漸近曲線は高校のときにならった漸近線と関係はありますか?

お答え： ありません.

質問 6： 測地的曲率ベクトルの "測地的" とはどのような意味でしょうか?

お答え： 「地面を測る」. 曲面上で長さを測ること. 測地的曲率ベクトルが恒等的に零であるような曲線を測地線という.

質問 7： 2 つの主曲率が一致したときは, なぜ主方向が定義されないのでしょうか? 1 つだけでも主方向が決まると思うのですが. . .

お答え： すべての方向が「主方向」になってしまうからです. 実際, ワインガルテン行列は対角化可能なので, 固有値が重根をもてばその固有空間は 2 次元になります.

質問 8： 2 つの主曲率が一致するということは法曲率の最大値と最小値が一致するということなので, すべての法曲率は一致することになるのでしょうか?

お答え： そうです.

質問 9： 曲率線についてイマイチイメージが湧かなかったため, Wikipedia で調べたところ, 次のような記述がありました.「臍点の近くでは, 曲率線は典型的には次の 3 つの構成をとる. 星状, レモン状, モンスター状」せい点の近くではこの 3 つの構成しかありえないんですか? （日本語が変な質問ですが）

お答え： いいえ.「典型的には」はたぶん generically の訳語と思われます. だいたいこの分類に入るのですが, そうでない特殊な例があります. 曲率線の臍点の近くでの挙動は, たとえば, 福井敏純「曲線と曲面の基礎・基本」（牧野書店, 2016）の §3.6 を見よ.

質問 10： 問題 4-2 (1) で, $M \neq 0$ という条件をどう用いればよいのかわかりませんでした. 以下の議論のどこが誤っているか教えて下さい（以下略）

お答え： そうですね. 議論は正しいです. $M = 0$ のときはすべての方向が漸近方向となって「漸近曲線」が決まらないので除外したのでした. 問題を訂正します.

質問 11： 問題 4-2 である平面の（原文ママ：曲面？）漸近線座標での表示を考えましたが, 漸近線座標の表示を考えることは幾何学的にどんな意味がありますか.

お答え： (1) 各座標曲線の接線が, 接平面と曲面の交線の接線と一致する（テキスト 99 ページ, 定理 9.9）. (2) たとえば, 平均曲率が 0 であるような曲面（極小曲面）では漸近線座標は, 座標曲線が直交するような座標系を与える. (3) たとえばガウス曲率が負の定数となる曲面に, 漸近曲線による座標系（標準化して「漸近チェビシェフ座標」というもの）をとると, 曲面の基本方程式が単純かつよく見る方程式になる（サイン・ゴルドン方程式）. たとえば, 井ノ口順一「曲面と可積分系」（朝倉書店, 2015）の第 5 章を見よ.

質問 12： 4-1 を解く際に, どの曲面に対する基本量だったか, どのパラメータを軸（原文ママ：独立変数の意味か？）に見ているかを忘れそうになります. 複数の曲面, 曲線を扱う際に, ゴッチャにならないいい文字のおきかたってないですか?

お答え： テキストではいくつかの工夫をしていますが, 標準的な記法があるわけではありません. 自分で間違えない工夫をしてみましょう.

5 ガウスの定理

■接成分，法成分（復習）. パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する.

(5.1) $$\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \qquad (V_{\mathrm{P}} \text{ は } \mathrm{P}=p(u_0,v_0) \text{ における曲面の接平面}, \nu_{\mathrm{P}}=\nu(u_0,v_0))$$

と直和分解できる．ただし $\nu(u,v)$ は p の単位法線ベクトル．したがって任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は

(5.2) $$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \qquad ([\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} \in V_{\mathrm{P}}, [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}})$$

と一通りに分解することができる.

■測地線.

定義 5.1. 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上のパラメータづけられた曲線

$$\hat{\gamma}(t) = p\circ\gamma(t) = p\bigl(u(t),v(t)\bigr) \qquad \bigl(\gamma(t)=(u(t),v(t))\bigr)$$

が**測地線** geodesic であるとは

$$\left[\ddot{\hat{\gamma}}(t)\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

が成り立つことである.

問 5.2. 曲面上の曲線 $\hat{\gamma}(t)$ が測地線ならば，その速さ $|\dot{\hat{\gamma}}(t)|$ は一定であることを確かめなさい．このことから，測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存する.

問 5.3. 曲面 $p(u,v)$ 上の正則曲線 $\hat{\gamma}(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ が，<u>パラメータを適切に取り替えると</u> 測地線になるための必要十分条件は,

$$\hat{\nu}(t)\cdot\bigl(\ddot{\hat{\gamma}}(t)\times\dot{\hat{\gamma}}(t)\bigr)=0 \qquad \bigl(\hat{\nu}(t)=\nu\bigl(u(t),v(t)\bigr)\bigr)$$

となることである．このことを示しなさい.

問 5.4. 次を示しなさい.

- 平面の測地線は，弧長に比例するパラメータで表した直線である.
- 球面と，その中心を含む平面との共通部分（**大円** a great circle と呼ばれる）は，弧長に比例するパラメータで表示すると測地線になる.

■曲面上の最短線. 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上の 2 点 P, Q を結ぶ曲線の長さは

$$\mathcal{L}(\hat{\gamma}) := \int_a^b |\dot{\hat{\gamma}}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる.

定理 5.5 (テキスト 104 ページ，定理 10.5)**.** 曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ滑らかな曲線のうち，最短のものは適切にパラメータを取り替えれば測地線になる.

2017 年 1 月 12 日

注意 5.6. 定理 5.5 の逆は次の意味で正しくない：(1) 曲面上の 2 点を結ぶ，最短線でない測地線が存在することがある（球面上の，中心に関して対称でない 2 点を考えよ）．(2) 曲面上の 2 点を結ぶ測地線が存在しない場合がある．しかし，曲面上の与えられれた点 P に対して，「U 上の 2 点を結ぶ U 内の最短線がただ一つ存在する」ような P の近傍 U をとることができる（凸近傍）．

問 5.7. 平面上の 2 点を結ぶ最短線は，それらの点を端点とする線分であることを確かめなさい．

■ガウスの公式とクリストッフェル記号

定理 5.8 (テキスト 108 ページ，(10.7) 式)**.** パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル ν をとり，第一基本量を E, F, G, 第二基本量を L, M, N と表すとき，

$$p_{uu} = \Gamma^1_{11} p_u + \Gamma^2_{11} p_v + L\nu, \qquad p_{uv} = \Gamma^1_{12} p_u + \Gamma^2_{12} p_v + M\nu, \qquad p_{vv} = \Gamma^1_{22} p_u + \Gamma^2_{22} p_v + N\nu \tag{5.3}$$

が成り立つ．ここで Γ^k_{ij} は**クリストッフェル記号**（テキスト 108 ページ，(10.6) 式で与えられる）である．

注意 5.9. クリストッフェル記号は第一基本量とその偏導関数のみからきまる．

系 5.10 (測地線の方程式，テキスト 109 ページ (10.8))**.** 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0, \qquad \ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0$$

が成り立つことである．

■驚異の定理　等式 (5.3) とワインガルテンの公式（テキスト 85 ページ，命題 8.5）を用いて，p_{uuv}, p_{uvu} を p_u, p_v, ν の線型結合で表し，ν の係数を比較すると，**ガウス方程式**（テキスト 123 ページの定理 11.2；驚異の定理）が得られる．これは**ガウス曲率 K を第一基本量で表す式** である．

問 5.11. ガウスの驚異の定理を用いて，正確な地図がつくれない理由を説明しなさい．

問題

5-1 曲面

$$p(u,v) = \bigl(\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v\bigr) \qquad (v > 0)$$

上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t)$ $(\gamma(t) = (u(t), v(t)))$ が

$$u(t)^2 + \cosh^2 v(t) = a^2 \qquad (a > 1 \text{ は定数})$$

を満たしているならば，パラメータ t を適切にとれば $\hat{\gamma}(t)$ は測地線となることを示しなさい．

5-2 曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2, \qquad I\!I = 2\sin\theta\, du\, dv$$

と表されているとする．ただし $\theta = \theta(u,v)$ は (u,v) のなめらかな関数で区間 $(0,\pi)$ に値をもつものとする．このとき，ガウスの方程式（テキスト 123 ページ，定理 11.2）を θ とその偏導関数の関係式として具体的に表しなさい．