2017 年 1 月 19 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 6

お知らせ

- 本日，定期試験（2017 年 2 月 2 日）の予告をしました．出席されなかった方は，講義 web ページ，OCW で必要事項の確認をしておいてください．

前回までの訂正

- 講義資料 5, 3 ページ，問 5.2 の 1 行目：その速さ $|\hat{\gamma}(t)|$ はその速さ $|\dot{\hat{\gamma}}(t)|$ は
- 講義資料 5, 3 ページ，問 5.3 の 3 行目： $\ddot{\hat{\gamma}}(t) \times \dot{\hat{\gamma}}(t) = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\nu}(t) \cdot \bigl(\ddot{\hat{\gamma}}(t) \times \dot{\hat{\gamma}}(t)\bigr) = 0 \quad \bigl(\hat{\nu}(t) = \nu\bigl(u(t), v(t)\bigr)\bigr)$

授業に関する御意見

- あけましておめでとうございます．ちなみに，プリント冒頭の「2017 年あけましておめでとうございます」という文は誤用らしいです．（旧年が明けて新年になるため） **山田のコメント：** なるほど「夜があける」と同じ語法ですね．
- $\mathbb{R}^2$ 上で最短線は線分になることの証明はとても面白かったです．高校生にも教えてあげたいですね! **山田のコメント：** !
- 教科書の変分を用いた最短線の議論がとても難しいです． **山田のコメント：** そうかも知れませんね．授業では深入りしませんが，幾何学や物理学では重要な考え方ですので，じっくり読んで理解するとよいと思います．
- 問題 5-1 が難しかった（$u^2 + \cosh^2 v = a^2$ の条件をどのようにう使うべきかなかなかわからなかった．）
  山田のコメント： そうかもしれませんね．陰関数表示された曲線なので，陰関数の微分法が有効ですね．
- 例えば，インフルエンザでこのレポートを月曜日までに提出できなかったとして，後日レポートを提出したらそれは有効ですか?
  山田のコメント： 可能なら提出締切までに電子メイルにてご連絡ください．だまって翌週提出されても困ります．
- 特にありません． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 授業ででてきたクリストッフェルの記号はリーマン幾何学におけるクリストッフェルの記号と同じですか? 定義式が大きく異なるのでどのように関係しているのか気になりました．

お答え： 定義式はリーマン幾何学のクリストッフェルの記号と**全く同じ**です．実際，$(u, v) = (u^1, u^2)$, $E = g_{11}$, $F = g_{12}$, $G = g_{22}$ と書くと，$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl}(g_{il,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l})$ がテキストの (10.6) 式のようになります．

質問 2： 驚異の定理って何が驚異なんですか? 第一基本量だけでガウス曲率が表わせることで，そこまで“驚異的”に計算の手間が減るというわけではないと思うのですが．有効なのは 5-2 のように基本量はわかっているけど元の曲線（原文ママ：曲面のことか）を表す関数についてわかっていない場合でしょうか．

お答え： 「正確な地図が書けない」ことは，驚異の定理の帰結（テキスト 111 ページ「参考」）．また，112 ページのようにリーマン幾何学の誕生の背景にもなっている．図形としての「曲面」ではなく「第一基本形式だけを考える」ことに意味がある，ということを示しているわけです．118 ページの「双曲幾何」はそのような幾何の一種です．

質問 3： ガウス曲率が第一基本量（とその偏導関数）で記述できることは，幾何学的にどのような解釈ができるのでしょうか． **お答え：** 曲面上の「距離」を計測することでガウス曲率を測ることができる．したがって，2 つの曲面の間に長さを保つ対応関係があるならば，ガウス曲率は一致する．このことから，正確な地図（球面上の領域を，距離をたもちながら平面上の領域に対応づける）は存在しないことがわかる．

質問 4： ガウスの方程式を使うとガウス曲率は第 1 基本量とその 2 階偏微分で（山田注：2 階までの偏微分で，の意味か）記述できるとありましたが，第 1 基本量がわかって，第 2 基本量がどうしてもわからない状況はあるのでしょうか? それともガウスの方程式には，第 2 基本量を使わないこと以上に何か使い方があるのでしょうか?

お答え： 上の質問と回答参照．もう一つ補足：問題 5-2 の状況 $(\star)$ $ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2; I\!I = 2\sin\theta\, du\, dv$

を考える．ガウス曲率 K が一定値 -1 をもつ曲面のパラメータとして $(\star)$ を満たすものが存在する（漸近チェビシェフ網）．このとき，関数 $\theta=\theta(u,v)$ はガウスの方程式 $(*)$ $\theta_{uv}=\sin\theta$ を満たす必要がある．逆に，曲面論の基本定理から $(*)$ の解 θ に対して，対応する曲面 $p(u,v)$ が存在することがわかる（曲面論の基本定理）．このように「ある種の条件（この場合は $K=-1$）をみたす曲面」を構成する問題は，適切な座標のもとでガウスの方程式をとく問題に帰着されることがしばしばあります．

質問 5： 驚異の定理の "驚異" は「ガウス曲率 K が第一基本量 E, F, G の 2 階微分までを用いて表すことができる」ということに使われているのでしょうか． **お答え：**意味がわかりません．括弧の中の文そのものが「驚異の定理」．

質問 6： 平面上において，最短線は線分であるというのは三角不等式がその意味をよく表していますが，曲面上でも三角不等式は成り立つのでしょうか？ **お答え：**この講義では，曲面上の曲線の長さは扱いましたが，2 点間の距離は定義していませんでした．ですから，この質問は，これだけでは意味がありません．曲面上の 2 点間の "距離" を「2 点を結ぶ区分的になめらかな曲線の長さの下限」と定義すると，これは位相で学んだ距離になることが証明できます．したがって三角不等式は成立します（このことの証明だけなら簡単）．

質問 7： 曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ曲面上のなめらかな最短線が存在すれば，その弧長パラメータによる表示は測地線になるとのことでしたが，このことを用いて「地球上の 2 点を結ぶ最短線を経路として飛行機が走行（原文ママ：飛行のことか）すれば最も早く目的地に到着できる」といったようなことに応用できると思うのですが，どうでしょうか． **お答え：**日本発の欧州便の経路がほぼシベリアの真上を通るのはそのことが理由．

質問 8： 問 5.3 の「パラメータを適切に取り替えると」を「パラメータを弧長パラメータに取り替えると」に変えるのはダメでしょうか．証明では結局弧長パラメータを用いていたので，これでもよさそうな気がします．

お答え： 大丈夫．ここでは「測地線のパラメータは弧長とは限らない」ことに注意したかったので，このように書いた．

質問 9： 準測地線の弧長パラメータは測地線（山田注：弧長パラメータ 表示 は測地線，と言いたかったのでしょうか）ですが，準測地線を測地線にするようなパラメータは一般に弧長（あるいはそれに比例する）パラメータしかないのですか． **お答え：**それしかありません．理由は命題 10.1（テキスト 104 ページ）．

質問 10： 注意 5.6 で，曲面上の 2 点を結ぶ測地線が存在しない場合があると書いてありますが，定理 5.5 を考えると，曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ滑らかな最短曲線があれば，それは弧長パラメータより測地線になるから，結果的に「曲面上の 2 点を結ぶ滑らかな最短曲線がない場合もある」となります．これが理解できません．どの滑らかな曲面でも，どの 2 点をとっても最短曲線が存在するのではないですか？ **お答え：**いいえ．最短線が存在しない場合があります：講義で「平面から 1 点を除いたような曲面」という例を挙げました．

質問 11： 漸近座標表示を求める際の $dx+dy=d(x+y)$ のような式がよく分かりません．微小量に分配法則が成り立つのですか？（x に関する微小量と y に関する微小量の和が $x+y$ に関する微小量のというのはイマイチ理解できません）．

お答え： 「イマイチ」というのはどの程度までは理解できているのでしょうか．この講義では dx を「微小量」とはいわず，関数の**全微分**（または外微分，テキスト §7）として扱っている．そして，全微分という操作は線形です．それだけ．「微小量」という "イメージ" は大切ですが，イメージにたよりきってはいけません．

質問 12： 糸をピンと引っぱって得られるものは線分だと思います．外力のはたらかない点の運動だと，初速度 0 だと得られる図形は点ですね． **お答え：**そうですね．

質問 13： 測地線の方程式での $\mathit{\Gamma}_{11}^1$, $\mathit{\Gamma}_{12}^2$ ... などは $p_{uu}=\mathit{\Gamma}_{11}^1p_u+\mathit{\Gamma}_{11}^2p_v+L\nu$ などから定まる量だったと思いますが，問 5-1 でこの事実を用いようとしたら，$\mathit{\Gamma}_{11}^1$ ... など全然分かりませんでした．使い方が難しいです．

お答え： テキスト 108 ページ (10.6) 式（講義ノートにもそう書いてあります）に $\mathit{\Gamma}_{ij}^k$ の具体的な表示があります．問題 5-1 の状況では $E=\operatorname{sech}^2 v$, $F=0$, $G=\tanh^2 v$ なので，そこから簡単に計算できますね．

質問 14： 問題 5-1 について，講義資料の問 5.3 を直接的に使わずに，この問題を解くことはできますか．

お答え： できます．最初から t は弧長パラメータとして一般性を失わない．このとき

$$(\heartsuit)\qquad \dot u^2\operatorname{sech}^2 v+\dot v^2\tanh^2 v=1,\qquad \dot u\ddot u\operatorname{sech}^2 v+\dot v\ddot v\tanh^2 v-\dot u^2\dot v\tanh v\operatorname{sech} v+\dot v^3\tanh v\operatorname{sech}^2 v=0$$

が成り立つ．一方，$u^2+\cosh^2 v=a^2$ を t で 2 回微分すると

$$(\diamondsuit)\qquad u\dot u+\cosh v\sinh v\dot v=0,\qquad \dot u^2+u\ddot u+(\cosh^2+\sinh^2 v)\dot v^2+\cosh v\sinh v\dot v\ddot v=0.$$

これらの関係式から次を得る: $\ddot u-2\tanh v\dot u\dot v=0$, $\ddot v+\operatorname{sech} v\operatorname{csch} v(\dot u^2+\dot v^2)=0$.

6　ガウス・ボンネの定理

■ガウス・ワインガルテンの方程式．　パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν，第一，第二基本量をそれぞれ E, F, G; L, M, N とする．このとき，各点 (u,v) に対して $\{p_u, p_v, \nu\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える（正規直交とは限らない）．とくに $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は各 (u,v) に対して 3 次正則行列を与える．この $\mathcal{F}$ を曲面の**ガウス枠**ということにする．

命題 6.1 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** 上の状況で

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda$$

が成り立つ．ただし

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix},$$

Γ_{jk}^i はクリストッフェルの記号（テキスト 108 ページ，式 (10.6)），$A = (A_j^i)$ はワインガルテン行列（テキスト 82 ページ，式 (8.4)) である．

証明. テキスト 108 ページ (10.7) 式（ガウスの公式）とワインガルテンの公式（テキスト 85 ページ，命題 8.5）からすぐにわかる．□

系 6.2. 命題 6.1 の状況で,

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

が成り立つ．

証明. $\mathcal{F}$ が正則行列に値をとる関数であることと，$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ から従う．□

注意 6.3. 曲面 $p(u,v)$ が与えられれば，第一基本量，第二基本量が定まる．逆に，与えられた関数 E, F, G, L, M, N に対してそれらを第一，第二基本量にもつ曲面を求めることを考えよう．命題 6.1 の Ω, Λ は第一基本量，第二基本量から定まることに注意して，与えられた E, F, G, L, M, N に対して形式的に Ω, Λ を作り，命題 6.1 の $\mathcal{F}$ に関する偏微分方程式を解けばよいだろう．このような $\mathcal{F}$ が存在するための必要条件が系 6.2 である．実は (u,v) が動く範囲が単連結領域であれば，この条件は十分条件にもなっていていて，対応する曲面が存在することがわかる（曲面論の基本定理；テキスト 179 ページ，　定理 16.2)．

注意 6.4. 曲面論の基本定理から，第一・第二基本形式が曲面を定めるが,「第一基本形式・ガウス曲率・平均曲率」の組では曲面が定まらないことがある．これらの量を保ちながら変形できるような曲面を Bonnet 曲面とよぶ.

2017 年 1 月 19 日

問 6.5. 実数 α に対して

$$p_\alpha(r,\theta) = \left(r\cos(\theta+\alpha) + \frac{\cos(\theta-\alpha)}{r}, r\sin(\theta+\alpha) + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}, 2\cos\alpha\log r - 2\theta\sin\alpha\right)$$

と定めると，p_α の第一基本量，平均曲率は α によらないことを確かめなさい．（注：第一基本量が α によらないことと，ガウスの方程式（テキスト 123 ページ，定理 11.2）から，ガウス曲率が α によらないことは明らか）．

■面積要素と曲面上の関数の積分． パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ $\bigl((u,v)\in D\bigr)$

$$dA := \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

を曲面上の**面積要素**という．(u,v) の関数 $f(u,v)$ に対して

$$\int_{\overline{\Omega}} f(u,v)\,dA := \int_{\overline{\Omega}} f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{6.1}$$

と定める．ただし Ω は D の領域で，$\overline{\Omega}$ がコンパクトなものとする．

問 6.6. 積分の定義 (6.1) が曲面のパラメータのとり方によらないことを確かめなさい．

■ガウス・ボンネの定理 曲面上の測地線で囲まれた単連結領域 ΔABC 上で

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta ABC} K\,dA$$

が成り立つ（テキスト 110 ページ，定理 10.6）．さらに，閉曲面 S のオイラー数（テキスト 112 ページ）を $\chi(S)$ とおくと

$$\int_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ（テキスト 112 ページ，定理 10.7）．

問題

6-1 ガウス曲率が負であるような曲面上の 2 点 P, Q を通る測地線が 2 本あるとする．このとき，この 2 つの測地線分は円板と同相な領域を囲まないことを示しなさい．

6-2 回転トーラス（テキスト 69 ページ，問題 6-1）の全曲率を求め，それがオイラー数の 2 倍になっていることを確かめなさい

6-3（おまけ）陰関数

$$\bigl((x-2)^2+y^2-1\bigr)\bigl((x+2)^2+y^2-1\bigr)\bigl(x^2+y^2-4^2\bigr)+z^2=0$$

で与えられる図形 S はなめらかな閉曲面を与える．この曲面のオイラー数を求め，ガウス・ボンネの定理が成り立つことを確かめなさい．