2017 年 1 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 7

お知らせ

- 今回で講義は終了です．定期試験でのご健闘をお祈りいたします．
- 本日の講義は「いままでの補足大会」です/今回は提出課題はありません．
- 最終回ですので**授業評価アンケート**を行います．お手数ですが講義終了後に提出してください．

前回までの訂正

- 講義資料 6, 4 ページ，問題 6-2：オイラー数の 2 倍 $\Rightarrow$ オイラー数の 2π 倍．

授業に関する御意見

- 今日は，ガウスの驚異の定理の御利益がわかり，得した気分です． **山田のコメント：** でしょ．
- 問題 5-2 の解答はしないのですか? 問題 6-3 もお願いします．
  山田のコメント： 問題 5-2: ただ公式を写すだけだから不要では? 問題 6-3: 式をじっと見ていると，種数はわかるはず．ガウス曲率は $z = f(x,y)$ と表示できる部分で計算すればよい（陰関数の微分公式で f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を計算)．
- 時の流れが早すぎて，ついていけないのですが，これが「老い」「年齢を重ねる」ということなのでしょうか．いつのまにか，幾何学の試験がもうすぐです． **山田のコメント：** 老人山田への嫌がらせですか．
- おもしろい授業だと思います． **山田のコメント：** そうなんですか?
- 特にないです．山田のコメント：me, too. **山田のコメント：** ...
- 特にありません． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： テキスト 112 ページに "...$\mathbb{R}^3$ の有界閉集合になっている．このような曲面を閉曲面という" という閉曲面の定義がありますが，これに従うと $p(u,v) = (u,v,0)$ $(u,v) \in [-1,1]\times[-1,1]$ も閉曲面ですが，$\chi = 1$, $K = 0$ より $\int K\,dA \neq 2\pi\chi$ になります．私がどこで間違ったのですか?

お答え： 申し訳ありません．「有界閉集合」は「境界のない有界閉集合」です．境界をもつような曲面の場合も，境界の測地的曲率を含んだ形でガウス・ボンネの定理が成り立ちます（テキスト §13, 命題 13.4)．

質問 2： Gauss-Bonnet の定理は，領域が四角形や五角形でも成り立ちますか．

お答え： 次の形で成立します：内角が A_i $(i = 1,2,\dots,n)$ である曲面上の測地 n 角形 Δ (内部は円板と同相) に対して

$$\iint_\Delta K\,dA + (\text{外角の総和}) = \iint_\Delta K\,dA + \sum_{i=1}^{n}(\pi - \angle \mathrm{A}_i) = \pi$$

が成り立つ．(多角形が測地三角形に分割されている場合はすぐわかる)．

質問 3： 6-1 で測地線が 3 点以上で交わることはないのでしょうか?

お答え： あります．たとえば，前回の問題 5-1 の擬球面 $p(u,v) = (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$ $(v > 0)$ を考えます．ここで u の変域は書いてありませんが，u が 2π だけ増えると曲面上の同じ点に戻ってくるので，u は $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上で定義されていると考えて良いでしょう．この回転面上で $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ $(a > 1)$ を満たす測地線と，曲線 $v \mapsto p(0,v)$ $(v > 0)$（すなわち $u = 0$，これも測地線）の交点を求めると，$p(0, \cosh^{-1}\sqrt{a^2 - (2n\pi)^2})$，ただし右辺の n は $a^2 - (2n\pi)^2 > 1$ を満たす整数．a が十分大きければ，このような n はたくさんある．

質問 4： ガウス曲率が負である曲面上で，2 点を通過する測地線はただ 1 つに決まりますか?

お答え： いいえ．上の質問と解答参照．この現象と問題 6-1 との関係を考えよ．

質問 5： 講義資料 p4 の (6.1) とガウス・ボンネの定理の $\int$ は $\iint$ では? 他の本を見ると $\int_{\Delta \mathrm{ABC}} K\,dA$ ともあるので，どちらでもよいのかもしれませんね．

お答え： 申し訳ありません．テキストでは，積分記号を 2 個使っていましたね．実はテキストの後半（第 3 章）では 1 個にしています．おっしゃる通りどちらでもよいですが，テキストと統一した方が良かったですね．

質問 6： 空間曲線ではフルネ-セレ（枠)，曲面ではガウス枠，曲線と曲面の p. 115〜に更に γ' と $\boldsymbol{n}_g$ と ν の枠を考えるようですが，つながりがあるのですか? また新たな枠を取り直すのでねー

お答え： 考える問題ごとにフレームを考えるのがよいようです．問題を解きやすい「座標」を取るというのと似た考えです．たとえば曲面のガウス枠の変わりに正規直交枠をとる方法もよく使われます．

質問 7： 問 6-2，トーラスの単位法線ベクトルを計算したら，球面のパラメータ表示（重複があるが）になったのが面白かったのですが（計算が間違っていたとすれば大変恥ずかしい）これは当然の結論なのですか?

お答え： 単位法線ベクトルは，単位ベクトルですから，始点を原点にもってくれば終点は原点から距離 1 となる点，すなわち単位球面上の点となります．したがって，単位法線ベクトルは単位球面のパラメータ表示を与えます．このようにして，曲面 $p(u,v)$ から得られる球面への写像 $\nu(u,v)$ を「ガウス写像」ということがあります．これはパラメータ (u,v) に対応する曲面上の点における曲面の「方向」を与える写像になっています．

質問 8： トーラスの Euler 標数は 0 だと思っていたので 6-2 の問題で「Euler 数の 2 倍になっている」と言われても，まぁそりゃあ 0 になればそうでしょ，という感じですが，これは計算間違いか．ちなみに私の思っている Euler 数の定義は $\chi(S)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i b_i$ (b_i は Betti 数) です．

お答え： この講義でのオイラー数の定義は（ご質問のものと同値ですが）三角形分割によっています．もちろんトーラスのオイラー数は 0 です．計算間違いではありません．

質問 9： 問 6-3 の陰関数標示された曲面のオイラー数を求める方法がわからなかったので，教えて頂きたいです．

お答え： もちろん，ガウス曲率を積分すれば求められますが，絵を描けばすぐに分かります．（ヒント：$z=f(x,y)$ というグラフ表示をするとき (x,y) が動く範囲を考えよ)．

質問 10： 回転トーラスのオイラー数が 0 になることはどのようにして求めればよいのでしょうか（授業中にきちんと説明していたらすみません．） **お答え：**説明していません．三角形分割をしてみれば分かります．

質問 11： Gauss-Bonnet の定理は一般の n 次元において成立するのでしょうか? その場合 “角度” をどのように測ればよいのでしょうか? **お答え：**非自明な形で高次元化されます．“Gauss-Bonnet-Chern の定理” で調べよう．

質問 12： 閉曲面 S のオイラー数 $\chi(S)$ は $\chi(S)=\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,dA$ とかけますが，この式は閉曲線の回転数の式に似てると思いました．この 2 つの値には何か関係がありますか．また，回転数は任意の整数をとりますが，オイラー数は 2 より大きい数をとることはありますか．

お答え： 似てますね．直接は関係がないと思います．閉曲面の場合のオイラー数は曲面の内的な位相不変量（空間への入り方によらない）であるのに対し，閉曲線の回転数は曲線を平面に入れる入れ方に依存しています．後半：閉曲面では（向き付け不可能なものも）2 以下．さらに 2 以下のすべての整数値をとる．

質問 13： 教科書では向き付可能な曲面でガウス・ボンネの定理 $\int_S K\,dA=2\pi\chi(S)$ が成立すると書いていますが，これは三角形分割でオイラー数を定義しているから，オイラー数が定義されるように向き付可能という条件をつけているということでしょうか．それとも（オイラー数を三角形分割によらない方法で定義するとき）上記の式が成り立たない例があるのでしょうか．

お答え： 一般に閉曲面は（向き付け不可能でも）三角形分割可能なので，三角形分割でオイラー数の定義をすると，一般の閉曲面に対して定義されたことになります．ここで定義したオイラー数は位相幾何学で学ぶものと同じもの．

質問 14： 平面上の曲線では，曲率と捩率から（特異点がなければ）曲線を 1 つに決めることができました．空間内の曲面は主曲率だけでは決まらないとのことですが，主曲率の他に何が分かれば曲面を決められますか? 曲面が通る点が 1 つ決まればよいでしょうか．

お答え： まず最初が変．「平面上の曲線」に捩率は定義しません．ご質問ですが「第一・第二基本量がきまれば曲面がきまる」と講義で述べたはずです．最後に「曲面が通る点が一つ. . . 」はナンセンス．平面・空間曲線の基本定理と同様に「合同変換を除いて決まる」定理のはずですから．

質問 15： どんな曲面でもパラメータ表示で表せますか? **お答え：**ひと組のパラメータでは表せない．したがってパラメータによらない量を考えることが重要，ということを第 1 回，第 2 回の授業で説明した．

質問 16： 全曲率の幾何学的な意味は何ですか． **お答え：**曲面上でのガウス曲率の総和．