山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きにはは余白や裏面および所定の計算用紙を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です．
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は **2 月 9 日**の補講の際に返却いたします．当日出席しなかった方は，それ以降**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2017 年 2 月 16 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

問題 A [80 点] 定数 a, b が $\underline{a^2+b^2=1}$ を満たしているとき，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 p を

$$(*)\quad p\colon \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \longmapsto p(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr)$$
$$= (a\cosh u\,\cos v - b\sinh u\,\sin v,\ a\cosh u\,\sin v + b\sinh u\,\cos v,\ au - bv)$$

で定義する．次の文中の $\boxed{\ 1\ }$∼ $\boxed{\ 15\ }$ に最もよく充てはまる数・式を入れ，下線 **a** をつけた部分に証明をつけなさい.

- 式 $(*)$ の p は $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された C^∞-級写像である.
  とくに，$_{\mathbf{a}}$$\underline{\mathbb{R}^2 \text{ 全体で } p \text{ は正則性の条件を満たす}}$，すなわちなめらかな曲面の正則なパラメータ表示を与える．p の単位法線ベクトルは $\nu = \boxed{\ 1\ }$, 第一基本形式は $ds^2 = \boxed{\ 2\ }$, 第二基本形式は $I\!I = \boxed{\ 3\ }$ となるので，この曲面の主曲率は $\boxed{\ 4\ }$，ガウス曲率は $\boxed{\ 5\ }$, 平均曲率は $\boxed{\ 6\ }$ である.
- この曲面の点 $\mathrm{P} = p(1,0)$ における接ベクトル空間 V_{P}，すなわち P において曲面に接するベクトル全体のなす空間は，ベクトル $\boxed{\ 7\ }$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の $\boxed{\ 8\ }$ 次元部分空間で，その直交補空間は $\boxed{\ 9\ }$ であるから，$\mathbb{R}^3$ は V_{P} と $\boxed{\ 9\ }$ に直和分解される．いま，実数 α, β $\bigl((\alpha,\beta)\neq(0,0)\bigr)$ に対して，(u,v) 平面上の $(1,0)$ を通る曲線

$$\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr) = (1+\alpha t, \beta t)$$

  に対応する曲面上の曲線 $\hat\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ の点 P における法曲率は $\boxed{\ 10\ }$，(α,β) を動かしたときの法曲率の最大値は $\boxed{\ 11\ }$, 最小値は $\boxed{\ 12\ }$ となる.
- 以下，$\underline{a=1, b=0}$ とする．定数 c に対して，曲面上の曲線 $\sigma(t)$ を $\sigma(t) = p(c,t)$ で定める．このとき，σ の加速度ベクトル $\ddot\sigma$ を $V_{\sigma(t)}$ の要素とその直交補空間の要素に分解すると

$$\ddot\sigma(t) = \boxed{\ 13\ } + \boxed{\ 14\ } \qquad \left(\boxed{\ 13\ } = [\ddot\sigma]^{\mathrm{T}},\quad \boxed{\ 14\ } = [\ddot\sigma]^{\mathrm{N}}\right)$$

  となるから，$\sigma(t)$ が測地線になるのは $\boxed{\ 15\ }$ の場合である（測地線になりえないならば，解答欄に×を記しなさい）.

裏面に続く

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔問題 2〕

問題 B [10 点] 次の 2 問のうち 1 つを選択して解答しなさい.

問題 B-1: 方程式 $x^4+y^4+z^4=1$ を満たす $\mathbb{R}^3$ の点 (x,y,z) の集合はなめらかな曲面を表す．この曲面上の点 (a,b,c) における曲面のガウス曲率を求めなさい.

問題 B-2: 曲面

$$p(u,v)=(\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v) \qquad (v>0)$$

上の点 $p(u,v)$ における 2 つの漸近方向のなす角を (u,v) を用いて表しなさい.

問題 C [10 点] 次の 2 問のうち 1 つを選択して解答しなさい.

問題 C-1: 「$(\star)$ 曲面の第一基本型式がパラメータのとり方によらない」とはどういうことか.
注：証明は求めていない（したがって証明が書いてあっても見ない）．$(\star)$ を証明できるような命題の形に書き表すのが問題.

問題 C-2: 「正確な地図をつくることができない」ことの理由を述べなさい.

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．何を書いても怒りません.

参考：双曲線関数の性質

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x},\qquad \operatorname{cosch} x=\frac{1}{\sinh x},\qquad \coth x=\frac{1}{\tanh x},$$
$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,\qquad 1-\tanh^2 x=\operatorname{sech}^2 x,$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,\qquad \frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,\qquad \frac{d}{dx}\tanh x=1-\tanh^2 x.$$

おつかれさまでした ♡

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 各 5 点; コメントは問題 C の解答欄の下に

1 $\left(-\dfrac{\cos v}{\cosh u}, -\dfrac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u\right)$		
2 $\cosh^2 u(du^2+dv^2)$	3 $-a\,du^2+2b\,du\,dv+a\,dv^2$	
4 $\dfrac{1}{\cosh^2 u}, \quad \dfrac{-1}{\cosh^2 u}$	5 $\dfrac{-1}{\cosh^4 u}$	6 0
7 $\left\{\begin{pmatrix} a\sinh 1 \\ b\cosh 1 \\ a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b\sinh 1 \\ a\cosh 1 \\ -b\end{pmatrix}\right\}$	8 2	9 $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\cosh 1} \\ 0 \\ \tanh 1\end{pmatrix}$
10 $\dfrac{-a\alpha^2+2b\alpha\beta+b\beta^2}{\cosh^2 1(\alpha^2+\beta^2)}$	11 $\dfrac{1}{\cosh^2 1}$	12 $\dfrac{-1}{\cosh^2 1}$
13 $-\tanh c\begin{pmatrix} \sinh c\,\cos t \\ \sinh c\,\sin t \\ 1\end{pmatrix}$	14 $\dfrac{1}{\cosh c}\begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ \sinh c\end{pmatrix}$	15 $c=0$

問題 a

$$p_u = \bigl(a\,\sinh u\,\cos v - b\,\cosh u\,\sin v, a\,\sinh u\,\sin v + b\,\cosh u\,\cos v, a\bigr)$$
$$p_v = \bigl(-a\,\cosh u\,\sin v - b\,\sinh u\,\cos v, a\,\cosh u\,\cos v - b\,\sinh u\,\sin v, -b\bigr)$$

だから

$$p_u\times p_v = \cosh u\bigl(-\cos v, -\sin v, \sinh u\bigr) \qquad |p_u\times p_v|^2 = \cosh^2 u\,\bigl(1+\sinh^2 u\bigr) = \cosh^4 u$$

となり，p_u, p_v はつねに一次独立である．

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 10 点

← 選択した問題番号を記入する

以下，答え合わせのため最終的な答だけ示します．正解にいたる方法はたくさんあるはず

B-I: ($z=f(x,y)$ のグラフで表示できる領域で陰関数の微分公式を用いる)．

点 $(x,y,z)=(a,b,c)$ におけるガウス曲率は $K=\dfrac{9(abc)^2}{(a^6+b^6+c^6)^2}$.

$z=f(x,y)$ と表示して（あるいは陰関数定理で表示できるとして）計算すればよいが，z の 2 次偏導関数の形を書いていない答案は減点した．“$z_{xy}=0$ という誤った式を書き，正解に至っている答案があり「どこかでごまかしている」ように見えたので．2 次偏導関数が計算できていれば 5 点くらいついているはず

B-II: $p_u \pm p_v$ が漸近方向

漸近方向のなす角は $\tan^{-1}\dfrac{\sinh v}{\sinh^2 v-1}=2\tan^{-2}\operatorname{sech} v=4\tan^{-1}e^{-v}$.

漸近方向が求まっていれば 5 点．そこまでは演習問題として扱ったものですね

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 10 点

← 選択した問題番号を記入する

C-I: パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ と，それからパラメータ変換 $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$ によって得られる曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)=p(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ を考えるとき，
p の第一基本型式 $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ と $\tilde{p}$ の第一基本型式 $\widetilde{E}\,d\xi^2+2\widetilde{F}\,d\xi\,\eta+\widetilde{G}\,d\eta^2$ は

$$u=u(\xi,\eta),\quad v=v(\xi,\eta),\quad \underline{du=u_\xi d\xi+u_\eta\,d\eta,\quad dv=v_\xi d\xi+v_\eta\,d\eta}$$

なる置き換えにより一致する.
「“$ds^2=d\tilde{s}^2$” が成り立つこと」とあるが，これらが「等しい」とはどういうことかを説明していないものは不正解.
解答例の「下線部分」が書かれていないものは不正解.

C-II: 「正確な地図」とは，地球のある領域 D と平面上の領域 D' の間の対応で，D 上の任意の曲線の長さが，対応する D' の曲線の長さに一致するものと考える.
平面の標準的な座標 (u,v) は，平面のパラメータ表示 $(u,v)\mapsto(u,v,0)$ を与えているが，上のように地図があるならば，球面上の領域 D のパラメータも同時に与えていることになる.
地図が正確ならば，この 2 つのパラメータ表示により対応する曲線の長さは一致しなければならないが，そのためには第一基本量が一致することが必要十分である.
ガウスの驚異の定理より，ガウス曲率は第一基本量のみによってきまるので，正確な地図が存在するならば平面と球面のガウス曲率は一致する.
地球を半径 R の球面と見なすとそのガウス曲率は $1/R^2$，一方平面のガウス曲率は 0 であり，上にのべたことに矛盾する．したがって，正確な地図は存在しない.
ガウスの「驚異の定理」またはそれらしき事実に言及していないものは不正解

問題 A のコメント： 計算に誤りがあっても，そこをスタートして正しい結論がえられていると思われるものは原則として正解にしています.

- 7: $(u,v)=(1,0)$ の値を聞いているので u がのこっているものは不正解.
- 9: “$\nu(1,0)$” では部分空間ではないので不正解．“$\langle\nu\rangle$” は $\nu(u,v)$ と $\nu(1,0)$ のいずれを考えているか読み取れないので不正解とした．$\langle\nu_{\mathrm{P}}\rangle$ は正解.
- a: $p_u\times p_v$ がどんな形になるか一切書かずに “$p_u\times p_v\neq\mathbf{0}$” と書いた人は不正解にした．なぜ零でないと考えたのか読み取れないから.

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．何を書いても怒りません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 4 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **4 枚揃っていない答案は採点いたしません**.
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	