2016 年 4 月 15 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 E (MTH.B501) 講義資料 2

お知らせ

- 頂いた提出物は返却しております．いくつかの「赤字」は読めないかも知れません．山田用のメモと思って下さい．いただいたご質問にはこの用紙にてお答えしております．

前回までの訂正

- 講義 web ページ，東工大 OCW の公開がおくれておりましたが，4 月 12 日に公開いたしました．
- 講義ノート 1 を不完全な形でお配りしてしまったようです．今回再配布，再アップロードいたします．（かといって完全はわけではありません）
- 宿題の問題の条件 “a and b are positive constants” は “$a > 0$ and $b \geqq 0$ are constants” に修正します．

授業に関する御意見

- 久し振りに先生のお話が聞けるので楽しみにしています． **山田のコメント：** あまり期待し過ぎないでください
- もっと計算量の少ない宿題をお願いします． **山田のコメント：** なぜ?
- 20 点程度で満点の単位とのことでしたが，評価方法をより明確にしていただけると幸いなのですが，公開していただけないでしょうか． **山田のコメント：** 申し上げた通りで，この用紙の得点を合計したものが評価の対象．いまのところ，20 点を超えたものは 20 点として，さらに 5 倍すれば 100 点満点になるかな，と考えています．ただし，提出状況などにより変更が有る可能性を残しておきます（これより厳しくなることはない）．
- 計算力不足なのですが，がんばってついていきたいと思います．計算途中できれいにまとまっていくので面白かったのですが，出てきた結果には確信はありません． **山田のコメント：** 残念，ちょっと違っていました．
- 他大から来たのですが，簡単なベクトル解析しかやっていないので，もう少しゆっくり進めていただけるとうれしいです． **山田のコメント：** ここまでは「前提科目」の復習だったのでちょっと早め．これからあとは少しゆっくりになります．
- 目下，特にありません． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 改訂前の「曲線と曲面」では傍用参考書として適さないのでしょうか? 買い直すべきですか?

お答え： 第 4 回目にあつかう「曲面論の基本定理」は改訂版ではじめて証明をつけています．また，負定曲率の回転面の分類も改訂版にしかありません．なお「曲線と曲面」を引用する際には，改訂版のページ番号などを引きます．

質問： 単位法線ベクトルの向きは通常どちら側にするのでしょうか．簡単な例があれば教えて頂ければ有り難いと思っています． **お答え：**曲面に向きが入っているならば，向きに同調する座標系 (u,v) を取り，$(f_u \times f_v)/|f_u \times f_v|$ を ν と定める．たとえば，球面を $f(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ でパラメータ表示して (u,v) が正の向きとなるように向きを与えておくと，$(f_u \times f_v)/|f_u \times f_v| = -f$ となり「内向き」の法線が求まる．一方，$f(\xi,\eta) = (\sin\xi\cos\eta, \sin\xi\sin\eta, \cos\xi)$ と書いて (ξ,η) が正の向きと考えると，$\nu = (f_\xi \times f_\eta)/|f_\xi \times f_\eta| = f$.

質問： 「微分すると平行移動を排除している」は微分で定数が消えるのでわかり易いのですが，「内積をとると回転を排除している」はよくわかりませんでした．

お答え： 曲面の第一基本形式などは回転と平行移動によらない，ということの直感的説明ですね．曲面を回転すると，その「向き」は変わります．しかし，たとえば曲面上の座標曲線同士がなす角度は変わりません．すなわち曲面上の向きの「相対的な関係」は変わらないわけです．そして向きの相対的関係すなわち角度を求めるのが内積です．式の方が理解しやすいのであれば，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x} \cdot P\boldsymbol{y}$ (P は直交行列).

質問： ベルトラミの擬球もディニの擬球もガウス曲率 $K \equiv -1$ となるようですが，$K \equiv -1$ となる曲面は皆擬球と呼ぶのでしょうか？呼ばないとしたら（$K \equiv 1$ となる曲面すべてを球とよばなないように）どうしてベルトラミのものやディニのものは偽キュうと呼ばれるのでしょうか?

お答え： 擬球の定義はたいていの場合曖昧ですが，$K = -1$ の曲面を pseudospherical surfaces というようです．同様に $K = 1$ の曲面を spherical surfaces といいます．慣用的な呼び方だと思います．

質問： 4 次元以上の曲面（2 次元多様体の $\mathbb{R}^4$ への埋め込みがされたもの，たとえば平坦 2 次元トーラス $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}$ の "ガウス曲率" はどのように定めるのでしょうか．（上述のトーラスで常に 0 になるような）． **お答え：**第一基本形式（誘導計量）は簡単に求まります．そこで，第 2 回の講義で紹介する Theorema egregium を用いて（対象を拡大して適用して）ガウス曲率を定義します．

質問： ベルトラミの考えた擬球面は，漢字を見ると "球ににているもの" という意味になると思うのですが，まったく球には見えません．なぜそのような名前なのでしょうか．（私ならラッパ面とかにします）

お答え： すくなくとも Bertlami は漢字を知らなかったはずです．イタリア語では "pseudosfera" のようですね．英語での対応物は pseudosphere. 球面上の幾何学と擬球面上の幾何学が類似の性質をもっていることから来ています．たとえば，3 辺の長さが a, b, c の単位球面上の直角三角形は $\cos c = \cos a \cos b$ を満たしますが，擬球面上では $\cosh c = \cosh a \cosh b$ を満たします (Pythagorian-type theorems).

質問： 幾何学としては，ユークリッド幾何 ($K = 0$)，双曲幾何 ($K < 0$)， 楕円幾何 ($K > 0$) の三種が考えられると聞いたことがあります．ここで双曲幾何と楕円幾何を比べてみると，私の主観では双曲幾何の方が研究が盛んであるように思いました．（こんなことを書くと怒られるかもしれませんが）それはなぜなのでしょうか．漠然とした質問ですがお考えがあればお教え下さい． **お答え：**2 次元の楕円幾何学は球面幾何学ですから数百年も前からかなり盛んに研究されています．大航海時代を迎えた世界は「測地法」として球面幾何学を必要としていたわけです．比べて，双曲幾何学のおこりは新しく，19 世紀の後半と思います．しかし，トポロジーとの関連を考えると双曲幾何学の重要性は紛れもない，ということがわかってきたので，いま，世の中を見ているわれわれには双曲幾何の方が盛んのように見えるのでしょうね.

質問： 曲面の曲率を求めるため，かなり複雑な計算が必要でしたが，近似的であっても簡単に曲率が求められる方法とかもあったりしますか． **お答え：**ガウス曲率は，たとえば円の周の長さと半径の比を用いて定義することができます（梅原・山田「曲線と曲面」改訂版，134 ページ）．この幾何学的な意味は明確ですが，実際に計算するのは大変に面倒くさい．むしろ，第一・第二基本量を計算して求めるのがもっとも簡単に思えます.

質問： Weingaretn 行列の固有値が実数であることの証明で $\mathrm{P} \in \Sigma$ を fix して $f = (x, y, \varphi(x, y))$ と書いていましたが，$z = \varphi(x, y)$ と書けるのは局所的に書けるという認識で大丈夫ですか． **お答え：**大丈夫.

質問： "Weingarten matrix=Shape operator" と考えて良いのですか?

お答え： Shape operator (型作用素) の基底 $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ に関する表現行列です．一般に，曲面 $f \colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ の型作用素とは，各点 P 毎に定まる線型変換 $A_{\mathrm{P}} \colon T_{\mathrm{P}}\Sigma \to T_{\mathrm{P}}\Sigma$ で，"$A = -d\nu$" と書けるもの（ν は単位法線ベクトル場）のこと．この引用符つきの等号は，"$X \in T_{\mathrm{P}}\Sigma$ に対して $df_{\mathrm{P}}(A_{\mathrm{P}}(X)) = -d\nu_{\mathrm{P}}(X)$" が成り立つように $A_{\mathrm{P}}(X)$ を定める" ということ.

質問： $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ を Weingarten Matrix 「と呼んでいる」と断定を避ける言い回しにしていたのは何か理由があるのでしょうか． **お答え：**そう言わない人も多いので．「曲線と曲面」（改訂版）ではこの語を使っています.

質問： 次元が 3 次元より高い immersion の場合の単位法線ベクトル，第 1・第 2 基本形式はどのように求めるのでしょうか． **お答え：**n 次元多様体 Σ の $\mathbb{R}^{n+1}$ へのはめ込み（超曲面 hypersphere という）なら，やり方は同じ：接空間が $\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元部分空間になるので，それに直交する方向がただ 2 つきまり，どちらかを単位法線ベクトルに選ぶことができる．そこで $df \cdot df$, $-df \cdot d\nu$ で第 1，第 2 基本形式を定義すればよい．一般に n 次元多様体 Σ を $\mathbb{R}^{n+m}$ にはめこむ場合でも，第 1 基本形式の定義はまったく同様にできますが，法線ベクトルが決まらないので，第二基本形式はうまく定義できません．面倒くさいので説明しませんが，「法バンドルに値をもつ 2 次形式」として定義するのが普通です.

質問： 4 次元以上では外積（クロス積）が定義できないとのことでしたが，"3 本の 4 次元ベクトルのどれとも直交する正の向きのベクトルを得る操作" という意味で拡張できないでしょうか．（引数が 2 つじゃないので積にはならないですが） **お答え：**もちろん．ちょっと考えれば正確な定義や成分表示を発見できるはず．やってごらんなさい.

質問： insersion も immersion も どう定義の「はめ込み」という理解で正しいでしょうか? ノートに 2 種類の英語と「はめこみ」の日本語をつけていました.

お答え： insersion という語は用いていないはずです.