2016 年 4 月 22 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 E (MTH.B501) 講義資料 3

お知らせ

- 4 月 14 日以降の震災により罹災された熊本・大分のの皆様にお見舞い申し上げますとともに，一刻も早い復興をお祈り申し上げます.
- 本日の宿題は問題 **3-1** です.
- 提出期限を過ぎた提出物は得点になりません.

前回までの訂正

- 第 1 回講義ノートで，ワインガルテン行列の定義式の typo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & MM & N \end{pmatrix}$$

  がありましたが，4 月 15 日に配布した改訂版では修正されています.
- Weingarten Formula の板書で右辺に "ν" が入っていた，というご指摘がありました．たぶん "f_u, f_v, ν の線形結合で書けるが，ν の成分は消えてしまう" という説明をしたのだと思います.
- 講義ノート 11 ページ，(2.4) 式の 3 番目：

$$f_{vv} = \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + N\nu \qquad \Rightarrow \qquad f_{vv} = \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + N\nu$$

授業に関する御意見

- (1) からどう変形するか思いつかず，自樹分の中で手詰まりになってしまいました．ちなみにガウス曲率は -1 であることは分かっています．($A = \ldots$ から求めた)
  山田のコメント： (1) ははめ込みとなる条件なので，そこからの変形とはならないはずです．(3) でガウス曲率は -1（これは定義からわかる）とガウスの方程式で得られたガウス曲率が「一致する」というのが非自明.
- 初回で紹介されたサイン・ゴルドン方程式が宿題の結果になり，伏線が回収されたみたいで面白かったです.
  山田のコメント： まだ回収しきっていないんです.
- 筑波大の三谷純先生が公開している ORI-REVO というソフトで回転面を折り紙で折るための設計図が得られるようです．これにより回転面であるような擬球は折り紙で作れると思われます.
  山田のコメント： なるほど．このとき「曲率」は折り目に集中するんですよね.
- 先生のギャグ (?) おもしろいです.　**山田のコメント：** あまり期待しないでください.
- 大変丁寧に構成され，運営されていると思います.　**山田のコメント：** ありがとうございます.

質問と回答

質問： ds^2, II が一致すれば $\mathbb{R}^3$ 内で合同という定理が成り立つとのことでしたが，これは，曲面の埋め込みの仕方を知るために，II の情報が必要なのであって，曲面の等距離微分同相類を知りたいだけなら ds^2 の情報だけで十分という理解でよしいですか? また，これは局所的な話でしょうか?

お答え： 「等距離微分同相類」で何を指しているかわからないのですが，"内的な距離を保つ" ということならそのとおりです．最後の「これは」の「これ」は何を指していますか?

質問： 課題 (3) について，$K=(LN-M^2)/(EG-F^2)=-1$ になりますが，課題の結果では θ の式になっており θ 依存です．これはどのように理解すればよいのでしょうか?

お答え： 問題の状況が起きるためには θ は勝手に選べない．この場合は $\theta_{uv}=\sin\theta$ が成り立っていなければならない，ということです．

質問： 講義資料 11 ページの Lemma 2.3 はどういう場面で力を発揮するのでしょうか．Christoffel symbols を求めるだけであれば 10 ページの Definition 2.2 があれば充分だと思いましたので．

お答え： 実は今回の宿題で使えるような気がします．

質問： 多様体上の接続を考えたときに，クリストッフェル記号がでてきたのですが，Gauss formula で出てきたものと同じ関数を表しているのでしょうか．

お答え： はい，第一基本形式 ds^2 をリーマン計量とするリーマン多様体のリーマン接続（Levi-Civita 接続）のクリストッフェル記号です．

質問： 講義の中の Christoffel symbol を求める計算をみると，非常に単純になっているように見えます．これは何故でしょうか? 何かコツのようなものでもあるのですか? また，一般の次元の場合も，超平面（原文ママ：超曲面のことか）の場合等，単位法ベクトルが定まる場合では同様い単純になるのでしょうか?

お答え： 前半：コツではなく計量（第一基本形式）が特殊な形をしているからです．一般の形ではやはり複雑．後半：クリストッフェル記号は第二基本形式にはよらないので，超曲面であるかどうかとは無関係.

質問： はめ込みがよく登場し，埋め込みを本講義で聞かないのですが，はめ込みで仮定として十分ということなのでしょうか?

お答え： 「なににとって十分か」によりますね．ここでははめ込みを考える，ということです．曲面をパラメータ表示すると，“埋め込み” の条件は書きにくいですね.

質問： 私の計算が合っていれば，宿題 (3) の結果はサイン・ゴルドン方程式でしたが，θ は基本量のパラメータ（ただし (u,v) に依る）でした．サインゴルドン方程式の解となる函数 θ を以って宿題のように基本量を決めると，ガウス曲率 -1 の曲面をすべて表現できるのでしょうか?

お答え： はい．それがこれから数回のテーマ.

質問： $f_{uv}=f_{vu}$ について調べたのですが，点 (a,b) の近傍で f_u, f_v, f_{uv} が存在し，f_{uv} が連続であれば，$f_{vu}(a,b)$ が存在し，$f_{uv}=f_{vu}$ が成立する［シュワルツの定理］ようでした．これが成立しないような曲面では Gauss Formula は使えませんが，どんな議論が進むのでしょうか?

お答え： とりあえず考えない，というのがここでの立場．ご質問のような状況は u, v のパラメータが特殊な意味をもつはずで「パラメータによらない曲面の不変量」を考える意味がなくなってしまうように思います.

質問： $f\colon 2$ 次元 C^∞ 多様体 $\to \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 4)$ とういうはめ込みにおいて $df\circ df$ から “第一基本量” を決めて，そこでガウスの驚異の定理の式を以って 4 次元以上にはめこまれた（原文ママ：4 次元以上のユークリッド空間にはめこまれた）曲面のガウス曲率を定めるのでしょうか?

お答え： そうです．もっと一般に，はめ込みがなくても「計量」が定義されていれば，驚異の定理をもってガウス曲率の定義としてよいわけです．これは，一般次元のリーマン多様体における「リーマンの曲率テンソル」「断面曲率」の 2 次元における特別な場合になっています.

質問： 第一基本量と第二基本量を自由に決めたとき，それが曲面となるための十分条件などはありますか?

お答え： それが今回と次回のテーマ.

質問： 2 次元はヲタク向けとのことでしたが，2 次元で余次元 2 以上の場合もまたヲタク向けなのでしょうか.

お答え： さあ，ヲタクも多様ですからね.