

2016年4月29日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 E (MTH.B501) 講義資料 4

前回までの訂正

- 講義ノート 13 ページの $\tilde{\mathcal{F}}$ を \mathcal{F}_1 に変更。今回 $\tilde{\mathcal{F}}$ を異なった意味で用いるので。
- 講義ノート 13 ページ 7 行目: $\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{F}}^{-1} = P \Rightarrow \mathcal{F}_1\mathcal{F}_1^{-1} = P$
- 講義ノート 18 ページ (3.4) 式:

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= \Gamma_{21}^1 L + \Gamma_{21}^1 M - \Gamma_{11}^1 M - \Gamma_{11}^2 N, & \Rightarrow & & L_v - M_u &= \Gamma_{21}^1 L + \Gamma_{21}^2 M - \Gamma_{11}^1 M - \Gamma_{11}^2 N, \\ M_v - N_u &= \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{12}^2 M - \Gamma_{12}^1 M - \Gamma_{12}^2 N. & & & M_v - N_u &= \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M - \Gamma_{12}^1 M - \Gamma_{12}^2 N. \end{aligned}$$

- 講義ノート 20 ページ, 問題 3-1 (2): curvature is constant \Rightarrow curvature is **negative** constant
- 講義ノート 23 ページ, 8 行目: $q := \frac{1}{4}((L - N) - iM) \Rightarrow q := \frac{1}{4}((L - N) - 2iM)$

授業に関する御意見

- 改訂版の「曲線と曲面」を購入しました。これまでは初版の教科書を図書館で借りていましたが、時々小さなすいえんぴつの書き込みがあって味があります。本来は書き込み禁止なのですが、図形理解の補助線等程度なので、見つけると別の人の痕跡のようで楽しいです。
山田のコメント: お買い上げありがとうございます。邪魔になる書き込みと、そうでないものがありますね。
- 共変微分, リーマン曲率テンソルについて, 天下り式ではない定義・説明などをききたいと思っています。たとえば S^2 , 双曲面等の上で, 具体的にどのようなことを表わしているのか, 説明頂ければ幸いです。
山田のコメント: そうですね...この科目のスコープを超えているので, どこか別の機会です。
- isothermal coordinates のお話が興味を引かれました。第 2Q の授業も楽しみです。
山田のコメント: よろしく
- それる横道もまた面白く, 毎週金曜がたのしみになってきました。
山田のコメント: 期待しすぎないでください。
- 曲線と曲面の P82 (8.5) $\tilde{A} = (\)^{-1}A(\) \dots$ に疑問に感じてたら(原文ママ:「に疑問を感じてたら」のこたか)授業ノートを読みとちゃんとやってみました。小さな式変形ですが, 疑問を感じる箇所はおさえてますね。授業とセットで本を読むものですね。
山田のコメント: そりゃそうだ。

質問と回答

質問: 等温座標系の内容について, 理解はできるのですが, ふと気がつく \mathbb{R}^2 上の議論が \mathbb{C}^1 上の議論に変わっていて, 非常に不思議な気がします。この場合, 多分, 背後に $\mathbb{P}(u, v)$ 平面の接平面上に積分可能な概複素構造が定義できて...』という議論があるのだらうと予想していますが(間違っていたらすみません)こういう条件下では $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^1$ と未定よいのかと疑問に思っています。いかがなものでしょうか。

お答え: 複素座標を取れることは, 以下の(少し長い)ストーリーによります: 向き付けられた 2 次元リーマン多様体に「等温座標系」が存在することから, 「向きに同調した等温座標系」たちによる被覆(アトラス)が得られます。このとき, 座標変換はコーシー・リーマンの方程式を満たす(曲線と曲面 §15 の定理 15.5)ので, 実の座標 (u, v) を複素座標 $z := u + iv$ とすることで「複素座標による被覆で, 座標変換が正則なもの」が構成できたこととなります。この複素座標系により複素多様体の構造が得られたこととなりますから, 「向き付けられた 2 次元リーマン多様体には 1 次元複素多様体の構造が入る」こととなります。
ご質問のような「概複素構造」の言葉では, 次のように考えることもできます: 2 次元リーマン多様体の座標近傍 $(U; (u, v))$ 上で, 向きに同調した正規直交基底の場合 $\{e_1, e_2\}$ をとり, $Je_1 := e_2, Je_2 := -e_1$ により U 上の $(1, 1)$ -テンソルを定義することができます。 J は向きに同調した正規直交基底の場のとり方によらないので, 多様

体全体で $(1, 1)$ -テンソル場 J が定義されたことになるのですが、定義のしかたにより $J \circ J = -\text{id}$ となるので、これは多様体の複素構造を与えます。ところが J に付随するナイエンハイス・テンソルは自動的に零になってしまうので、この複素構造は可積分、すなわち複素構造になります。この複素構造と、最初にのべた複素構造はまったく同じものです。

以上の議論は 2 次元特有のもので、高次元の場合には適用されません。微分幾何学では、次元が低い、とくに 2 次元の場合と高次元の場合で大きく異なる現象がたくさんあります。

質問: z, \bar{z} ($z \in \mathbb{C}$) を独立変数として偏微分のような操作をしていましたが、 \bar{z} は z の共役のはずです。アールフォースの『複素解析』p. 28 では「純粋に形式的なもので証明としての効力は持たない」と書かれている一方、他ではよくみる記法ですが、どう解釈すればいいのでしょうか。

お答え: $z = u + iv$ という座標に対して $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$ と「定義」した、と思ってあまり困ることはないと思います。 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の点 P における接空間 $T_P \mathbb{C}$ は実 2 次元の空間ですが、それを複素化した $T^{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ 上で $\partial/\partial u, \partial/\partial v$ の線形結合で表されるベクトル、と考えればよいでしょうか。

質問: 第一基本形式、第二基本形式等いろいろな計量(原文ママ:いろいろな「量」というべきか)がとる座標軸によらないという話がよく出てきます。とるざ表示行くに依らないことによるメリットは何になりますか? 今は 3 次元曲面(原文ママ:この場合は 3 次元ではなく 2 次元(図形自体の次元)というべきでしょう。あるいは 3 次元空間内の曲面)で考えているけれど、 n 次元とか ∞ 次元とかを考える時に容易になるからでしょうか?

お答え: 高次元化と関係しているから、というのはちょっと違います。自然界で「座標軸」や「座標原点」を見たことがありますか? 座標というのは問題を記述するために人工的に与えたものと思えます。したがって「何をとってもよい」はずで、図形本来の性質はどんな座標で表現しても同じでなければなりません。したがって「幾何学的な量」は座標のとり方によってはいけないのです。(物理学では「物理法則は慣性系のとり方によらない」という「相対性原理」を学びますね。)

質問: 授業でガウス曲率が -1 になる図形(原文ママ:曲面というべきか)を主に扱っていますが、 $K = -1$ の図形に共通する形の特徴はありますか? 曲曲(改) p 247 を見ると、中間に沿っていて端っこが広がるかすばまるかのどちらかになっているのですが、他にももっと複雑な形なったりするのでしょうか。

お答え: 253 ページや 254 ページに(特異点をもつ)例があがっていますね。結構複雑。他にも、たとえば http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o.html#PseudosphericalSurfaces で絵が見れます。共通の性質としては「局所的に非ユークリッド幾何学が成り立つ」。この手のお話は、たとえば第 3 クォーターの「横断科目: 歴史に学ぶ数学」(水曜日 3,4 時限)で少しします。

質問: Exercises 3-1 を解く際に、 $\frac{g_u}{2g} = \frac{M_u}{M}$ など、 M が分母に出てきたのですが、 $M \neq 0$ としてよかったですでしょうか。お答え: そうですね。ガウス曲率が負の定数でないとは駄目ですね。(「前回までの訂正」参照)

質問: 今回の宿題の例は漸近座標系といましたが、ガウス曲率が 0 のときでも漸近座標系というのでしょうか。

お答え: 上の質問と回答参照。ガウス曲率が 0 になる点では漸近座標系はとれません。

質問: リーマン面において極小曲面であれば $q = \frac{1}{4}((L - M) - iM)$ (原文ママ: $q = \frac{1}{4}((L - N) - 2iM)$, 「前回までの訂正」参照)が holomorphic になるということでしたが、逆に q が holomorphic であるとき、どういう条件を付加することで極小曲面になるかということは既に知られているのでしょうか。

お答え: はい、ガウス写像に関する条件になります。第 2 クォーターで扱います。

質問: The integrability condition の Ω や Λ は何かの頭文字から来ているのでしょうか。またギリシャ文字なのは Λ が第二基本量の L と重複するためアルファベットでなくギリシャ文字を使っているということでしょうか。

お答え: とくに意味はないです。

質問: 単語がちらとでてきた量子情報幾何とは何でしょうか。情報幾何は聞いたことがあるのですが、どのあたりが“量子”なのでしょう。

お答え: 「非可換性」なのですが、こちらも素人なのでいい加減なことはいえませんが。長岡先生の解説 <http://ci.nii.ac.jp/naid/10016632336> をご覧ください。

質問: K (ケー) と κ (カッパ) は先生はどのようにかき分けてますか? お答え: 黒板を見て。

質問: はめ込みを考えるということでしたが、 \mathbb{R}^3 へのはめ込みがあれば、模型は作れるのでしょうか? (T^2 (トーラス)の等長性というか平坦さが失われたものとしてのドーナツのように)

お答え: ご質問の意味がわかりません。

質問: プリント 11 の (2.4) (原文ママ: 講義ノート 11 ページの (2.4) 式のことですね) の f_{vv} の係数はなぜ曲曲の本と違うのですか? お答え: 講義資料 2 の「前回までの訂正」参照。