2016 年 5 月 6 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 E (MTH.B501) 講義資料 5

お知らせ

- 来週 **5 月 13 日**（金）は休講とさせていただきます．提出物は通常どおり 16 日に締め切ります．

前回の補足

「宿題」から曲面論の基本定理の証明の最後の部分が示されることの説明が不足だったようです．

- 宿題の問題を誤解した方 2 名：$\mathcal{H}$ は問題に与えられたものであって，(4.3) 式の解 $\mathcal{F}$ から $\mathcal{H} := \mathcal{F}^t\mathcal{F}$ と定めるものではありません．（そんなことは問題のどこにも書いてありません．）
- 曲面論の基本定理の証明のアウトライン：
  - 方程式 (3.1)（ガウス・ワインガルテン方程式）を，初期条件（講義ノート 34 ページ，4 行目）のもとで解く．
  - 上でもとめた解を $\mathcal{F} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n})$ と列ベクトルに分解したとき，方程式 (3.1) の第 1 式の第 2 列および第 2 式の第 1 列を見れば，から $\boldsymbol{a}_v = \boldsymbol{b}_u$ が成り立つことがわかる．したがって，ポアンカレの補題（Corollary 4.7）から，$f_u = \boldsymbol{a}$, $f_v = \boldsymbol{b}$ となる $f \colon D \to \mathbb{R}^3$ が存在する．
  - 上でもとめた f が与えられた第一・第二基本量をもつことを示す．f のとり方から，$\mathcal{F} = (f_u, f_v, \boldsymbol{n})$ の形となっているが，ここで E, F, G が f の第一基本量，$\boldsymbol{n}$ が単位法線ベクトルであることを示そう．いま $\mathcal{H} := \mathcal{F}^t\mathcal{F}$（これは宿題の $\mathcal{H}$ とは異なる）とおくと，これは次の微分方程式と初期条件を満たす：

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = {}^t\Omega\mathcal{H} + \mathcal{H}\Omega, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} = {}^t\Lambda\mathcal{H} + \mathcal{H}\Lambda, \qquad \mathcal{H}(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} E_0 & F_0 & 0 \\ F_0 & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (E_0 = E(\mathrm{P}), \mathrm{etc})$$

    一方，あたえられた E, F, G を用いて，$\mathcal{H}_0$ を講義ノート 31 ページの最後の行のようにおけば，$\mathcal{H}_0$ も同じ初期条件と方程式を満たす．ここで，線形微分方程式の解の一意性（講義ノートでは，P と Q を結ぶ道にそって常微分方程式を考えている）から

$$\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = \begin{pmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_v & f_u \cdot \boldsymbol{n} \\ f_v \cdot f_u & f_v \cdot f_v & f_v \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n} \cdot f_u & \boldsymbol{n} \cdot f_v & \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \end{pmatrix}.$$

    このことから E, F, G は f の第一基本量で，$\boldsymbol{n}$ が単位法線ベクトルであることがわかる．さらに (3.1) 式を見れば $f_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = L \dots$ となり，第二基本量は L, M, N となることがわかる．

前回までの訂正

- 余因子行列の定義（講義で口頭で述べたもの）が誤っていたかも知れません：正方行列 A の i 行，j 列を除いた小行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を書けたものを A_{ji}，$\widetilde{A} = (A_{ij})$ とおき，これを A の余因子行列という．(i,j) 成分の “余因子” を「転置して並べている」ことに注意.
- 講義ノート 21 ページ，(3.5) 式の
  Ω の定義式の $(2,3)$-成分：$-e^{2\sigma}M \Rightarrow -e^{2\sigma}M$ ；Λ の定義式の $(2,3)$-成分：$-e^{2\sigma}N \Rightarrow -e^{2\sigma}N$
- 講義ノート 25 ページ，下から 3 行目：$I \in \mathbb{R} \Rightarrow I \subset \mathbb{R}$
- 講義ノート 28 ページ，下から 5 行目：Lemma ?? ⇒ Lemma 4.5

授業に関する御意見

- 講義に出てきた web サイトの Klein bottle がよく見る（略）絵ではなくて驚きました．
  山田のコメント： いろいろ書き方がありますね．「曲線と曲面」の 67 ページの絵はどのようにして描いたのでしょう．
- 講義ノートはなぜ英語なんですか？ **山田のコメント：** ラテン語ができないからです，ではなく.... 大学院講義の「英語化」（2018 年目標）に向けた試行と思ってください．もちろんこれが正しい方向かどうかは別ですが．
- 本日の講義は長い長い証明だったので，フォローするのに疲れました． **山田のコメント：** あらすじを理解してください．
- 授業日程のカレンダーが最初に配布されているので助かります． **山田のコメント：** でしょ．

質問と回答

質問： 講義ノート，Theorem 4.2 において，未知関数の行き先を有限次元ベクトル空間 V としていますが，V への関数が C^∞-級であるとは，ある基底に関して V を $\mathbb{R}^n$ と同一視したときに，$\mathbb{R}^n$ への関数として C^∞-級である，という定義でよろしいですか？ (V を多様体とみなす，ということです)． **お答え：**そのとおり．

質問： 単連結でない領域で，曲面論の基本定理が成り立たない簡単な例はありますか．

お答え： まず，単連結でない領域でも，その単連結な部分領域では基本定理が成り立ちます．すなわち局所的には曲面論の基本定理が成立するわけです．しかし，領域全体では曲面が定義できない，というわけで，たとえば次のような例をあげておきます（幾何学特論 F で紹介するかもしれない「ヘリコイド」という曲面です）：$\mathbb{R}^2$ の領域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で

$$ds^2 = \left(\frac{1+u^2+v^2}{u^2+v^2}\right)^2 (du^2+dv^2), \quad II = \frac{4}{u^2+v^2}\bigl(-uv\,du^2 + (u^2-v^2)\,du\,dv + uv\,dv^2\bigr)$$

とおくと，これはガウス・コダッチ方程式を満たす．ここで $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ $(-\pi < \theta < \pi)$ とおくと，$f = \bigl(\bigl(r - \frac{1}{r}\bigr)\sin\theta, -\bigl(r-\frac{1}{r}\bigr)\cos\theta, -2\theta\bigr)$ はこの基本量に関するガウス・ワインガルテンの方程式を満たすことが確かめられる．曲面論の基本定理の一意性により，あたえられた基本量をもつ曲面はこれと合同である．ここで，f の表示式の第 3 成分は $\theta \to \pm\pi$ で異なる値に近づき，$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で連続でないことがわかる．

質問： Cor 4.4 の内容がよくわからなかったのですが，$\dot{\mathcal{F}}$ は何の記号ですか？ 微分だと思ったのですが，$\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ と何が違うのですか？ **お答え：**違いません．講義でも併用していますよね．

質問： 今回の問題を解いていると，Lemma 2.3 は今回の問題を解くためにあるのではないかと錯覚してしまうほど大活躍したのですが，他の場面でも Lemma 2.3 がそのまま使えるような場面はあるのでしょうか．

お答え： すぐには思い浮かびませんが，結構使いでがあります．

質問： 微分方程式の具体的な解を得るための一般的手法はなかったと記憶しているのですが，与えられた E, F, G, L, M, N から具体的に曲面の形を求めることは必ずできるのでしょうか．

お答え： 「具体的に曲面の形を求める」が何を指しているのかわかりませんが，「微分方程式の解が存在しているのだから，その解で具体的に与えられる」としてよさそうですよね．

質問： 前回 4/29 の質問の回答に，2 次元リーマン多様体特有の性質がありましたが，教科書 p. 144 の定理 13.3 の（原文ママ：も？）2 次元リーマン多様体に特有で，他次元では成り立っていないのでしょうか？

お答え： いいえ，この命題は一般次元のリーマン多様体に対して成立します．「曲線と曲面」では 2 次元多様体しか扱っていないので，このようなステートメントにしました．

質問： メビウスの帯は長方形の紙からひねりはしても伸び縮みなくして模型をつくることができるので，至るところガウス曲率は 0 になりそうです．しかし，講義にでてきた曲面の web サイトにあったメビウスの帯の式からガウス曲率を求めると，点を独立変数とする函数になってしまいました．ガウス曲率がパラメータのとり方に依るはずはないので，最初にのべた作り方の “平坦” メビウスの帯を伸縮させてしまっているのでしょうか．

お答え： ご質問のメビウスの帯のガウス曲率は負となり，紙を伸び縮みさせずにつくることはできません．実際に紙の帯からつくるメビウスの帯については，さまざまな研究がありますが，（ちょっと古い）解説として Gideon E. Schwarz, “The Dark Side of the Moebius Strip”, The American Mathematical Monthly Vol. 97, No. 10 (1990), pp. 890–897 があります．最近の成果については，たとえば K. Naokawa, “Geometry of Möbius strips”, PhD Thesis, 2013, Tokyo Institute of Technooogy; 直川耕祐，3 次元 Euclid 空間のメビウスの帯の特異点，数理解析研究所講究録別冊 B38, 2013, pp. 139–151 などをご覧ください．