2016 年 5 月 20 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 E (MTH.B501) 講義資料 6

お知らせ

- 授業スケジュール変更（別紙参照）
  - 5 月 27 日のテーマ（ヒルベルトの定理 ⇒ ベックルント変換）
  - 6 月 3 日のテーマ（ベックルント変換 ⇒ すすんだ話題）
  - 6 月 3 日の授業時間変更（16:00-17:30），
  - 6 月 3 日の講義室変更（数学系 201 セミナー室）
  - 6 月 6 日：補講中止（スケジュール表のミス．補講日は 7 日のはずですが，それを中止）
- 授業内容は 5 月 27 日で完結するようにします．6 月 3 日の講義は「補足」「すすんだ話題」となります．ご都合の悪い方は無理に出席する必要はないと思います．
- 提出物は 5 月 27 日が最終です．

前回の補足

問題 5-1 について：曲面

$$f(u,v) = \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, v - \tanh v\right)$$

の第一・第二基本形式は

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2 v}(du^2 + \sinh^2 v dv^2), \quad II = \frac{\tanh v}{\cosh v}(-du^2 + dv^2)$$

となるが，$u = \xi - \eta$, $v = \xi + \eta$ なる変数変換で漸近チェビシェフ網 (ξ, η) が得られる．

前回までの訂正

- 講義ノート 35 ページ，Fact 5.5 の 1 行目：*srufae* ⇒ *surface*
  いくつかスペルの誤りがあります．探してみましょう（改訂版は web にあげてあります）．
- 講義ノート 36 ページ，12 行目：$II = \frac{du\,dv}{\sqrt{1+2u^2+2v^2}} \Rightarrow II = \frac{du\,dv}{\sqrt{1+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2}}$
- 講義ノート 38 ページ，3 行目：$II 2\widetilde{M}\,d\xi\,d\eta \Rightarrow II = 2\widetilde{M}\,d\xi\,d\eta$
- 講義ノート 38 ページ，5, 7, 8 行目：$M \Rightarrow \widetilde{M}$; $F \Rightarrow \widetilde{F}$.
- 講義ノート 38 ページ，10 行目：$\theta_{\xi\eta} = \sin\eta \Rightarrow \theta_{\xi\eta} = \sin\theta$ (問題 2-1 参照).

授業に関する御意見

- 今回の H. W. の (3) の解説をお願いします．Google で出てきた $\theta = 4\tan^{-1}(e^{\xi+\eta})$ の形にできませんでした．. . .
  山田のコメント： そうですよね．やってみますね．
- 19 世紀から 20 世紀始め頃の数学者の発想力と計算力にすごいものを感じます．
  山田のコメント： そうですね．もちろん「現在まで名前が残っている人」についてしか論評できないわけですが．

質問と回答

質問： 一葉双曲面の一葉とはどのような意味でしょうか.

お答え： “one sheet”.「曲線と曲面」索引（291 ページ）参照.

質問： またまた “漸近チェビシェフネット” という非常に扱いやすい座標系が出てきて驚いています. これは高次元にも拡張できるのでしょうか.

お答え： このままでは難しいと思います. 高次元で「良い座標が取れる」という話（高次元可積分系と関連する）は, $\mathbb{R}^4$ の共形平坦超曲面に関する Guichard net などが知られていますが, あまり多くないように思います（個人の感想）.

質問： 第 3 回の講義の中で, 等温座標系という扱い易そうな座標系が出てきましたが, “漸近チェビシェフネット” と “等温座標系” は何か特別な関係があるのでしょうか.

お答え： 直接はありませんが, “漸近線座標系” は第二基本形式に対する “等温座標系” に相当するものと見なすことができます. 一般に, ガウス曲率が負ならば, 第二基本形式は「符号数 $(1,1)$ の 2 次形式」になります.（すなわち, 第二基本行列 $\widehat{II}$ は正と負の固有値をひとつずつもつ対称行列）. このとき $II = 2M\,du\,dv$ という形になる座標系 (u,v) が存在する, というのが「漸近線座標系」の存在定理です. とくに $x = u + v$, $y = u - v$ と座標変換すれば $II = L(dx^2 - dy^2)$ と等温座標系における第一基本形式に似た形になります.

質問： Codazzi equation がよくわかりません. $\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$ の成分の一部が

$$L_v - M_u = \Gamma^1_{21}L + \Gamma^2_{21}M - \Gamma^1_{11}M - \Gamma^2_{11}N, \quad M_v - N_u = \Gamma^1_{22}L + \Gamma^2_{22}M - \Gamma^1_{12}M - \Gamma^2_{12}N.$$

であると考えていいですか?

お答え： ということが, 講義ノート 19 ページ 4 行目以降に書いてありますね.

質問： プリントの Example 5.8 で, 変数変換したあとに代入で second fundamental form を求めていますが, 厳密には計算しなおさないとダメだと思うのですが.

お答え：「計算しなおさないと」とは何を指しているのかわかりませんが,「第二基本形式がパラメータのとり方によらない」（講義ノート 6 ページ,「曲線と曲面」81 ページ）ことから, 講義ノートの計算が正当化されます.

質問： 5-1 (3) の $\theta(\xi,\eta)$ を見つけるときに $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$ が使えるかと思ったのですが, θ_ξ, θ_η がともに残ってしまい, うまく見つけられませんでした. うまい方法はあるのでしょうか.

お答え： 第一基本形式, 第二基本形式の成分と比較するだけです. 講義でやってみます.

質問： 漸近線座標のイメージがつかめません. “全ての点で速度ベクトルが漸近方向を向くような曲面上の曲線を漸近線という” と「曲曲」p 234 に書いてあり, 漸近方向は “法曲率が 0 となるような接ベクトルの方向” と書いてありますが, 法曲率は図形的にはどういう意味を持ちますか?

お答え： 法曲率の図形的意味は「曲線と曲面」の定理 9.1, 漸近方向の意味は定理 9.9.

質問： 平坦な 2 次元トーラスが（円）×（円）で表せたように, 平坦なクライン・ボトルは（平坦なメビウスの帯）×（円）で表せるのでしょうか? 同様に平坦な 2 次元射影空間は（平坦なメビウスの帯）×（平坦なメビウスの帯）で表せるのでしょうか. × は直積です. 表せるというのはパラメータ表示できるという意味です.

お答え： 一般に m 次元多様体と k 次元多様体の直積は $m+k$ 次元多様体になりますので, 次元があっていないと思います.

質問： $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ を用いて漸近座標系を第二基本形式から求め, それからコダッチ方程式を利用して**第一基本形式でクロスターム以外の係数を** 1 にしていましたが, 二段階の変換なのですか? それとも第二基本形式を因数分解でクロスタームに変換したときに, 上述太線部が自動的にみたす（原文ママ：“みたされる” か?）のですか?

お答え： まず (1) 漸近座標系は, $K < 0$ なら（一定でなくても）存在します. (2) とくに K 負で一定なら, 漸近線座標系のもとで E は u だけの関数 G は v だけの関数となる（講義ノート 37 ページの下の方）ところまでが自動的. そこで座標を取り替えることで漸近チェビシェフ網ができます.

質問： 今回の H. W. (3) の θ はサイン・ゴルドン方程式 $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$ を満たすはずです（ただし $\sin\theta \neq 0$). 曲面の考察から θ を求めることで, 微分方程式であるサイン・ゴルドン方程式を解くということになるのでしょうか? 逆三角函数に代入して計算をすすめる以外に何か上手い方法はあるのでしょうか?

お答え： 2 つの “?” の関係がまったくわかりませんので, ご質問の意味がわかりません.