2016 年 5 月 27 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 E (MTH.B501) 講義資料 7

お知らせ

- 講義の本体・宿題は今回で終了です．ご聴講ありがとうございました．
- 次回は 6 月 3 日（金曜日）16:00–17:30，本館 2 回，数学系 201 セミナー室にて，講義から漏れた部分の紹介・提出物返却・無駄話．お時間がありましたらご出席ください．
- 幾何学特論 F (MTH.B502) は **6 月 24 日（金曜日）から開講**いたします．**6 月 17 日は休講**とさせていただきますのでご注意ください．なお，講義内容・日程などは 6 月 17 日ころまでに講義 web ページ
`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2016/geom-f`
`http://www.kotaroy.com/class/2016/geom-f` および OCW/OCW-i にて公開いたします．

前回までの訂正

- 講義ノート 48 ページ，問題 6-1 の (*) 式

$$(7.1)\quad (\varphi-\theta)_u = 2a\sin\frac{\varphi+\theta}{2},\quad (\varphi-\theta)_v=\frac{2}{a}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}$$
$$\Rightarrow\qquad (\varphi-\theta)_u = 2a\sin\frac{\varphi+\theta}{2},\quad (\varphi+\theta)_v=\frac{2}{a}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}$$

- 講義で計算した擬球の例の単位法線ベクトル

$$\nu=-\frac{1}{\cosh v}(\cos u\sinh v,\sin u\cosh v,1)\qquad\Rightarrow\qquad \nu=\frac{1}{\cosh v}(\cos u\sinh v,\sin u\cosh v,1).$$

単位法線ベクトルはどちらの向きにとってもよいのですが，問題 5-1 の f の表示で $(f_u\times f_v/|f_u\times f_v|)$ を計算すると後者になります．

授業に関する御意見

- 2Q の F の特論についていける自信がなくなってきました... **山田のコメント：** 心配しないでください (?)
- 存在だけでなく構成をしていく話が好きなので，今回の H. W. の PDE は（難しくて解けませんでしたが）とても面白く感じました．ベックルント変換が楽しみです．
山田のコメント： 山田もそういうのが好きです．
- 負定曲率の話から平坦な曲面がでてきて驚きました．（平坦が好き） **山田のコメント：** なんで平坦がすきなの?
- 高校生の頃， 三角関数の公式を数多く習いましたが，実際にこんなに便利に使わている例を見るのは初めてです．
山田のコメント： そうですか?

質問と回答

質問： 6-1 (1) で θ が sine-Gordon 方程式を満たしているのを前提しなくても，φ が sine-Gordon 方程式を満たすのが分かるのではありませんか?

質問： 今回の問題の (1) で，θ が sine-Gordon 方程式をみたすという条件は必要ない気がします．

お答え： そのとおりです．このような φ が存在するための条件が θ に関する sine-Gordon 方程式となります．

質問： (2) で変数分離法により得られる解の候補から解を得る方法が分かりませんでした．そもそも変数分離法では難しいのでしょうか．それとも私の力不足でしょうか．

お答え： $\varphi(u,v)=A(u)B(v)$ と書くという方法ですね．なぜこう置くとうまくいくと思ったのでしょう．

質問： Exercise 6-1 (2) は機械の力で $\varphi=4\cot^{-1}(e^{-au-v/a})$ と出てきたのですが，計算の仕方がわかりませんでした． **お答え：**どういう「機械の力」を使ったの?

質問： 今回出てきた $\mathcal{G}$ は何のために出てきたのでしょうか．

お答え： $\theta\equiv 0 \pmod{\pi}$ となる点を超えて写像 f が延長できることを示すため．ガウス枠 $\mathcal{F}=(f_u,f_v,\nu)$ を用いると $\sin\theta=0$ となる点で方程式の係数が発散する．

質問： immersion にならない特異点も含めて考えるというところが，analytic subset の議論と同じように感じました．$\mathbb{R}^3$ 内の曲面なので，複素幾何的な見方はできないと思いますが，代数幾何との関連性はあるのでしょうか．

お答え： ここでは直接は関係ありません．特異点を許すことで興味深い枠組みができる，という心は同じに思えます．

質問： プリント 46 ページの（例 6.10；原文ママ，たぶん Theorem 6.8 あたり）について $\mathcal{G}$, f が何故このようになるのか，具体的な計算がよくわかりません．ご説明していただけると有難いと思います．

お答え： たしかに「天下り」ですね．せっかくですからやってみましょう

質問： 5-1 でサインゴルドン方程式を，微分方程式で解くと，解が 2 つ $\theta(\xi,\eta)=4\tan^{-1}(\exp(\pm(\xi+\eta)))$ が出てきましたが，講義で紹介された tan の 2 倍角の公式を利用した方法では $\theta(\xi,\eta)=4\tan^{-1}\exp(-\xi-\eta)$ の一つに決まっています．$v>0$, $v<0$ に依存して定まるようなのですが，解を特定する根拠をどう考えればよいのかがよくわかりません．

お答え： tan を一度「ほどく」ところで角度の任意性に注意する必要があります（そこをきちんとやっていません）．

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cot t=\frac{1}{\tan t}$$

に注意すると，

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\tan x.$$

一方，sine-Gordon 方程式の解であるという性質は $\theta\mapsto\pi-\theta$ という変換で保たれるので，指数関数の中身の "$\pm$" の部分は本質的には同じ解を与えています．

質問： $\theta\colon \theta_{uv}=\sin\theta \Rightarrow \exists\mathcal{G}\colon D\to \mathrm{SO}(3)$ with (6.7), $\exists f\colon D\to\mathbb{R}^3$ s.t. $f_u=\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_1-\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_2$, $f_v=\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_1+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_2$ のとき p. 46 の微分形式 ω が $d\omega=0$ を満たすとのことですが $\omega=df$ と講義資料にありました．exact $\Rightarrow$ closed なので $d\omega=0$ になりそうですが，この場面で大切なのは $d\omega=0$ と $\omega=df$ のどちらなのでしょうか．

お答え： 求めたいのは $\omega=df$ となる f．そのようなものが存在することを示すために $d\omega=0$ を示す．すなわち (1) $\mathcal{G}$ が存在．(2) 微分方程式 (6.7) から ω が閉形式 ($d\omega=0$) であることを示す．(3) D の単連結性から $df=\omega$ となる f が存在する（Poincaré の補題）．

質問： sine-Gordon 方程式の自明解を真空解というのは，何か物理的な意味があるのでしょうか．

お答え： sine-Gordon 方程式はいわゆる（非線形）波動方程式で，さまざまな物理的な文脈に現れるようです．方程式がきちんと認識されたのは「相対論的量子力学」の分野と思われます（この辺は素人なので嘘を行っている可能性がある）．

質問： sine-Gordon 方程式はガウス曲率 -1 の曲面の研究で登場してきたのでしょうか? それとも偏微分方程式の 1 つとして，曲面とは独立に考えられてきた問題なのでしょうか．

お答え： たぶんオリジンは負定曲率曲面だと思います．これも断言はできないのですが．少なくとも G. Darboux, *Le cons sur la théorie générale des surfaces*, 1890 には（この講義のような文脈で）載っています．一方，この方程式は非線形の波動方程式（外力項が正弦で与えられる）の例として 20 世紀に再発見されています．方程式の Bäcklund 変換もその際に曲面とは独立に再発見されているようです．

質問： $\mathcal{F}$ の第 3 列や今回の $\boldsymbol{e}_3=\nu$ のように unit-normal がかなりカギを握っていそうに感じましたが，$\mathbb{R}^n$ $(n\geqq 4)$ へのはめ込みを考えるにはどうするのでしょうか?

お答え： 法線ベクトルが 2 本以上とれますよね．そしてそのとり方には無限次元の任意性があります．曲面の存在条件（可積分条件）はガウス方程式，コダッチ方程式，リッチ方程式が成り立つこと，というのが既知の事実ですが，具体的な曲面を造るためにはよい性質をもつフレームを取る必要があります．この講義の文脈では，漸近線座標系をとることで，曲面に接する方向のフレームを決めましたが，法線方向は唯一に定まるので考える必要がありませんでした．高次元（余次元）が高い場合は法方向についても同様の操作が必要なはずです．