2016 年 6 月 3 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 E (MTH.B501) 講義資料 8

お知らせ

- 返却した提出物には，いままでの合計ポイントが青字で記入されています．このポイントを x とするとき，評点は $5 \times \min\{x, 20\}$ とします．
- ご聴講ありがとうございました．第二クォーターは 6 月 24 日開始です．（6 月 17 日は休講）

前回までの訂正

- 今回の宿題の問題（講義ノートから修正したもの）に誤りがありました．いろいろと試行錯誤していただいたようです．ご指摘ありがとうございました．一応，こういう問題のつもりでした（単位法線ベクトルが違っていました）：

  Consider the following parametrization of the pseudosphere:

$$\tilde{f}(u,v) = \left(\frac{\cos(u-v)}{\cosh(u+v)}, \frac{\sin(u-v)}{\cosh(u+v)}, (u+v) - \tanh(u+v)\right).$$

  - Verify that (u,v) is the asymptotic Chebyshev net.
  - Show that $\tilde{f}$ is the Bäcklund transformation of the straigntline

$$f(u,v) = (0,0,u+v)$$

    accompanied with unit normal

$$\nu(u,v) = (-\sin(u-v), \cos(u-v), 0).$$

  今回，すこしだけ解説いたします．
- 講義ノート 49 ページ，下から 9 行目：Assume hat $\Rightarrow$ Assume that
- 講義ノート 50 ページ，6 行目：sine-Grodon $\Rightarrow$ sine-Gordon

授業に関する御意見

- 課題が一連の流れのようにつながっていて感心しました．sine Gordon 方程式，ソリトン解について，数学と物理的な解説とで随分違った印象をうけるなと思いました．

  山田のコメント： そうですね．楽しんでいただけましたでしょうか．
- 1Q とても楽しく受講できました．2Q もよろしくお願いします．　**山田のコメント：** こちらこそ

質問と回答

質問： 今週の問題について，$\nu = (\cos(u-v), \sin(u-v), 0)$ のときは (1) がとけませんでした．これは私のノートの写し間違いで，$\nu = (-\sin(u-v), \cos(u-v), 0)$ が正しいのでしょうか．

お答え： ご指摘ありがとうございます．山田の誤りで，ご指摘の後者の ν が正解です．

質問： この問題について，どうしても一定にならない所が多くなってしまい，自分で勝手に条件を満たすような形を作ってしまいました．（授業で言っていたらごめんなさい）

お答え： いいえ，こちらの間違いです．ごめんなさい．

質問： 講義で与えられた $\theta=0$ に対応する “曲面”（直線）の法ベクトル ν で計算すると $\hat{f}-f$ との内積が常には 0 にはならず，平行か逆平行になってしまいました．資料 p51 の ν_0 と思って計算すると $\hat{f}-f$ が ν_0 と直交しました．誤植でしょうか．ν_0 とベルトラミの擬球の法ベクトル $\hat{\nu}$ の内積が定数にならなかったので自信がないのですが. . .

お答え： はい，誤りでした．訂正した法ベクトルは擬球の法線と定角をなしているはずですが. . .

質問： 第 6 回では，H. W. の PDE を解かずして，1 つの漸近角 θ から別の漸近角 φ をもつ負低曲率曲面を構成するのがベックルント変換という説明をされていましたが，どのように変換するのでしょうか? 変換した $\mathcal{F}$ であるところの $\mathcal{G}$ を θ given として求め，${}^t\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$（適当な φ による）をフレームとするように $\hat{f}$ を求めると，$\hat{f}$ が f のベックルント変換になるのでしょうか.

お答え： ちょっと説明が不足でしたね，講義ですこしだけ説明します.

質問： $\hat{f}$ が f の Bäcklund 変換であることを述べるために何を言えばよいのかについて，確信がもてませんでした．オリジナルの定義と拡張された定義があって，課題では拡張された定義に基づいて確認するとの理解ではあるのですが.

お答え： 課題では，もとの「曲面」が特異点からなっていますので，「接平面」の意味が自明でありません．そこで単位法線ベクトルを一つ固定して，接平面とはそれに直交する平面と見なすことにしています（が固定するべき単位法線ベクトルを間違えました).

質問： f と $\hat{f}$ (f の Bäcklund 変換）が表す鏡面上では 7-1 から ν と $\hat{\nu}$ のなす書くが一定であることと $f(p)$ と $\hat{f}(p)$ の距離が一定で，$\hat{f}(p)-f(p)$ が p での接ベクトルにどちらでもなっていますが，ほかに Bäcklund 変換によって不変な性質はありますか? ガウス曲率とか. . . .

お答え： ガウス曲率はどちらも -1 だからもちろん不変．しかし，特異点の位置は動きます．この特異点の性質が Bäcklund 変換でどのように変化するかという一般法則は，すくなくとも山田は知りません.

質問： Bäcklund Transformations の (B-1) は $\tilde{f}(p)-f(p)$（原文ママ：$\hat{f}$?）が f と $\tilde{f}$ の両方に垂直である p が存在すればよいという意味でいいですか? どの点 p でもの意味ですか? 前者の意味なら，Bäcklund 変換はある 1 点におけるベクトル $\tilde{f}(p)-f(p)$ のお話ですか?

お答え： 講義ノート 49 ページの Bäcklund 変換の 3 つの条件の箇条書きのあとに，“for each $p\in D$” とありますから後者です．なお，箇条書きの各項目の最後が period ではなく comma になっているので，文のおわりはこの “for each. . . ” です.

質問： $f(u,v)=(0,0,u+v)$ は z 軸で，ty 高専であり，$f(u,v)$ の接平面とは $\nu(u,v)=(\cos(u-v),\sin(u-v),0)$ を与えることにより z 軸を含む平面と考えていいですか?

お答え： ν が間違っていて申し訳ありませんでしたが，“ν に直交する平面” です．z 軸を含む平面ですが，(u,v) の値を決める毎に異なった平面となります.

質問： 問題の $\hat{f}$ が Bäcklund 変換であることは定義以外から確認できるのでしょうか.

お答え： たぶんできないと思います.

質問： 課題での $\csc\frac{\theta}{2}$ が定義されていない結果がでましたが，どこに問題があるか気づけませんでした.

お答え： とりあえず今回やってみます.

質問： $\theta=0$ の Bäcklund transformation の繰り返しでつくることのできないガウス曲率 -1 の曲面は存在するのでしょうか.

お答え： たくさん存在します．今回は，いくつか例をお見せします.

質問： Bäcklund 変換というのは現在どのくらい理解されているのですか? 個人的には Bäcklund 変換による同値類が気になるのですが.

お答え： 大変よく理解されている，と思われているようです．どんな同値類を考えようとしていますか?（講義で少しだけコメントします）

質問： 完備な負定曲率曲面は存在しないとのことですが，各点で曲率を適当に歪めることによって，ある種の完備化のようなことはできるのでしょうか.

お答え： 今回少しだけ説明します.

質問： 2Q の特論 F で用いる複素解析の前提知識はどのレベルですか?

お答え： コーシー・リーマンの方程式，コーシーの積分定理，留数くらい.