2016 年 7 月 1 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 F (MTH.B502) 講義資料 2

お知らせ

- 授業日程変更：8 月 9 日（火曜日；補講日）の授業は中止いたします．したがって 8 月 5 日が最終回となります．

前回までの訂正

- 前回の宿題に typo がありました．申し訳ありません．講義ノート 8 ページ下から 3 行目：
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{L}(\gamma^t) = -\int_0^1 (V\cdot \boldsymbol{h})\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{L}(\gamma^t) = -\int_0^1 (V\cdot \boldsymbol{h})\,ds$$
- 講義ノート 1 ページ，3 行目：$f\colon D\to\mathbb{R}^2 \Rightarrow f\colon D\to\mathbb{R}^3$
- 講義ノート 1 ページ，脚注の日付：24. June, 2016.
- 講義ノート 2 ページ，1 行目：$|f_u\times f_v|\,du\,dv\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \Rightarrow |f_u\times f_v|\,du\,dv{=}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$
- 講義ノート 3 ページ，1 行目：
D (resp. $\overline{D}$) ise closed (resp. open) unit disc ⇒ D (resp. $\overline{D}$) is the open (resp. closed)
- 講義ノート 3 ページ，Theorem 1.1 の 1 行目：attins ⇒ attains
- 講義ノート 6 ページ，8 行目と 9 行目：$(f_u\times\nu_u) \Rightarrow (f_u\times\nu_v)$
- 「曲線と曲面」14 ページ下から 9 行目の $\gamma'' = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|^2} + \left(\frac{1}{|\dot\gamma|}\right)'\dot\gamma$ の第二項の前に $\frac{1}{|\dot\gamma|}$ が必要ではないかとのご指摘がありましたが，ここでは $'$ は s に関する微分，$\dot{}$ は t に関する微分と使い分けており（12 ページ冒頭），第二項にあるのは $'$ なのでこのままでよいのです．

授業に関する御意見

- 面積作用素（原文ママ：面積汎関数のことか）の変分から何となく高校数学（受験数学）の「はみだし削り論法」を想起しました．
  山田のコメント： それって何？
- ガウス曲率 -1 の例の竹形はねんりん家のバームクーヘンの形と似てますが，バームクーヘンの製造方法とガウス曲率は何か関係あるのだろうか?
  山田のコメント： 知りません．探してみよう．ちなみに「バウムクーヘン; Baumkuchen」が正しい表記では?
- 2Q もよろしくお願いします．
  山田のコメント： こちらこそ
- 梅雨のじめじめと夏の暑さに負けずがんばりたいと思います．
  山田のコメント： 山田はすでに負けています．

質問と回答

質問： $\mathcal{S}_c$ が空になってしまうような C は存在しない，という主張は正しいですか?

お答え： Regularity によると思います．ちゃんと調べないと正確にはお答えできませんが．

質問： 単純閉曲線 C を境界とする曲面を考える際，C がなめらかでない場合でもなめらかな場合と同様に扱えるのでしょうか．

お答え： なめらかでなさによるはず．ちゃんと調べないといけませんが，どこまで弱くできるかは自明ではありません（区分的になめらかなら十分ですが）．

質問： 単純閉曲線 C は至るところ微分不可能なものでも講義中の議論は成り立つのでしょうか.

お答え： いいえ．Green-Stokes の公式を使っています.

質問： Exercise 1-1 の計算で $[V\cdot\boldsymbol{e}]_0^1$ というのが出てきました．($\boldsymbol{e}=\dot\gamma/|\dot\gamma|$)．$V\perp\boldsymbol{e}$ であれば $[V\cdot\boldsymbol{e}]_0^1=0$ とすぐに結論づけられたのですが，どう計算すればよいのかよくわかりませんでした.

お答え： 端点をとめる変分を考えているので $V(0)=\boldsymbol{0}$, $V(1)=\boldsymbol{0}$.

質問： 講義中に定義した関数の空間 $\mathcal{S}_C$ に次の同値類を考えます．「f, $g\in\mathcal{S}_c$ に対して $f\sim g\Leftrightarrow\mathcal{A}(f)=\mathcal{A}(g)$」このとき (1) $\mathcal{S}_C/\sim$ は距離空間になると考えて良いのでしょうか．距離としては $d([f],[g])=|\mathcal{A}(f)-\mathcal{A}(g)|$ ($[f]$, $[g]$：f, g の同値類）が考えられますが，いかがですか．(2) また $\mathcal{S}_C/\sim$ は微分多様体と見ることがでkるようでしょうか．もしそうなら具体的な chart はどんな形なのでしょうか.

お答え： 写像 $\mathcal{A}\colon\mathcal{S}_C\to\mathbb{R}$ は，あきらかに単射 $\mathcal{A}'\colon\mathcal{S}_C/\sim\to\mathbb{R}$ を誘導します．とくに $\mathcal{S}_C$ 上の $\mathcal{A}$ の下限を m とするならば，$\mathcal{A}'(\mathcal{S}_C/\sim)=[m,+\infty)$（最小値をとる曲面が存在することを認めれば）となりますので，1 次元の境界付き多様体になりますね．ご質問の距離は $\mathbb{R}$ の距離そのものとなります.

質問： ガウス曲率は “丸み”（局所的に有る半径の球を表かウラにおくことで球面で近似できる）のようなものと認識していたのですが，平均曲率 H は絵的にはどうなるのでしょう? i.e., $H>0$, $H=0$, $H<0$ となる点の近くで曲面の様子はどのようになるのでしょうか.

お答え： まず，ガウス曲率はそういう認識ではまずいです．球面で近似できるのは正曲率のときだけで，曲率の正負が曲面の形に大きく影響します．一方，平均曲率の符号にはあまり意味がありません．実際，単位法線ベクトルの向きをかえれば平均曲率の符号は変わります．平均曲率の値によって決まるのは，たとえば円板の面積の増大度などがありますが，ここでは扱いません．平均曲率が 0 かつ主曲率が 0 でない点ではガウス曲率は負になるので 2 つの漸近方向をもちますが，$H=0$ という条件からこれらが直交することがわかります.

質問： 定式化前の “定理” をみると，「単純閉曲線のワイヤーを十分な量のシャボン液にひたしてできるシャボン膜が極小曲面となる」と言っているように感じました（表面張力最小を与える面がシャボン膜ときいたことがあるので)．直感的な（ひょっとすると高尚に物理的な？）理解として「」内は合っていますか.

お答え： あっています.

質問： $\mathbb{R}^3$ 内の単純閉曲線が立体交差しているようなものがどこまで絡みついてよいのか気になりました.

お答え： どういう文脈でお考えでしょうか.

質問： 講義資料 5 ページの

$$\begin{aligned}&\iint_{\overline{D}}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}|f_u^t\times f_v^t|\,du\,dv\\&\qquad=\iint_{\overline{D}}\frac{\bigl(V_u\times f_v+f_u\times V_v\bigr)\cdot(f_u\times f_v)}{|f_u\times f_v|}\,du\,dv\end{aligned}$$

の部分が分かりませんでした.

お答え： まず，ベクトル値関数 $\boldsymbol{a}(t)$ に対して

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{a}(t)|=\frac{d}{dt}\sqrt{vecta(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)}=\frac{\frac{d}{dt}\bigl(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)\bigr)}{2\sqrt{vecta(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)}}=\frac{2\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)\right)}{2\sqrt{vecta(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)}}=\frac{\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)\right)}{|\boldsymbol{a}(t)|}.$$

したがって

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}|f_u^t\times f_v^t|=\frac{\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}(f_u^t\times f_v^t)\right)\cdot(f_u\times f_v)}{|f_u\times f_v|}.$$

ここで $f^0=f$ を用いた．さらに積の微分公式を用いると

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}(f_u^t\times f_v^t)=\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}f_u^t\right)\times f_v+f_u\times\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}f_v^t\right).$$

ここで変分ベクトル場の定義（式 (1.9)）から

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}f_u^t=\left.\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}F(t,u)\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t}F(t,u)\right|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial u}V.$$