2016 年 7 月 15 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 F (MTH.B502) 講義資料 4

お知らせ

- 前回の講義ノートは修正が多いので今回再配布いたします．

前回までの訂正

- 講義ノート，17 ページ 3 行目：*holomorpihc* ⇒ *holomorphic*
- 講義ノート，15 ページ 15 行目, 17 行目：$(u_\xi v_\xi + u_\eta v_\eta)$ ⇒ $(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi)$
- 講義ノート，23 ページ 6 行目：it hold that ⇒ it holds that というご指摘がありましたが，式が 2 本なので，動詞は複数扱いだったように思います．違っていたらごめんなさい．
- 講義ノート，23 ページ：(3) の証明がちゃんと書かれていなかったので，追記しました．

授業に関する御意見

- 修学旅行で行った京都大にガラス製のクラインボトルが売っていて思わず買いましたが，水をいれるのが大変だったというのを思い出しました．
  山田のコメント： やってみたんだ．．．．原理的に水が「入らない」と思いますが（どこが内部だ？）．
- Riemann 面に関する良書があれば知りたいです．
  山田のコメント： あまりちゃんとした本で勉強してないので，なんとも言えませんが，微分幾何学的な立場なら Jürgen Jost, Compact Riemann Surfaces, An Introduction to Contemporary Mathematics, Springer, 2006 なんかはどうでしょう．
- 前回の課題がなかったら，課題 (2) のパラメータ変換は思いつかなかったと思います．　**山田のコメント：** ですよね．

質問と回答

質問： 課題 (2) のパラメータ変換は $\sinh^{-1}$ なので問題ないと思えたのですが，$\cosh^{-1}$ というのは条件付きで行ってもよいものなのでしょうか?

お答え： 逆三角関数と同じように，値域に制限をおきます．$y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y$ かつ $y \geqq 0$ とするのが普通．

質問： 仮定が曲面ではなく 2 次元リーマン多様体のものは $\mathbb{R}^3$ には決してはめ込み/埋め込みできないようなものであっても成立するということでしょうか．また「向き付可能な 2 次元リーマン多様体にはかならず 1 次元複素多様体の構造をもつ」ということですが，「曲面になること」はどのような（必要性，十分性など）関係があるのでしょうか．

お答え： 曲面になる必要はまったくないんです．それがよいところ．ただし，一般に 2 次元の実解析的リーマン多様体 (M, ds^2) は局所的には $\mathbb{R}^3$ に等長的に埋め込むことができます（Janet-Cartan）．

質問： 1 次元複素多様体は向き付可能な 2 次元リーマン多様体の構造をもつとは限らないのは $\mathbb{C}P^1$ などが反例となるからですか?

お答え： 「1 次元複素多様体は向き付可能な 2 次元リーマン多様体の構造をかならず持つ」のです．$\mathbb{C}P^1$ は向き付け可能で（S^2 と微分同相），計量（一般次元で Fubini-Study 計量と呼ばれているもの）も標準的な S^2 の構造と同じです．何か誤解しているようですね．

質問： クラインボトルもトーラスのよに長方形の端を同一視してつくる商空間として造ることができそうなので，平坦なクラインボトルがありそうなのですが，どんなパラメータ表示になるのでしょう? 調べても $\mathbb{R}^5$ に埋め込めば平坦になるとしかわかりませんでした...

お答え： そうですかね．けっこうシンプルな式で実現できます（もちろん $\mathbb{R}^3$ にはできません）

質問： isothermal parameter と同様な座標系は高次元でも存在するのでしょうか．（式は省略）

お答え： いいえ．計量が単位行列の関数倍になるようなリーマン多様体は**共形平坦** conformally flat といって，3 次元以上ではかなり強い条件になります．

質問： 極小曲面を高次元に一般化する場合には，isothermal parameter のような必ずとれる良い座標系は存在するのでしょうか．

お答え： しないようです．

質問： 任意偶数次元の実空間は，積分可能な概複素構造を持つことができて，複素空間と同一視できるのでしょうか．

お答え： いいえ．いつでもできるのは実 2 次元のときだけです．2 次元は，いろいろな意味で特別なことがおきます．

質問： minimal surface equation は楕円型方程式ということは，最大値の原理から，グラフで表せる極小曲面は境界でしか最大値をとらないのでしょうか．

お答え： 高さ座標が最大値をとるか，ということですね．そのとおりです．等温座標系をとると，座標関数は調和関数ですので，線形の方程式の最大値原理で十分ですね．

質問： Def 3.3 で $\Delta\varphi = 0$ を満たす実関数を harmonic と呼ぶ背景は何ですか（偏微分方程式と関係あるように見えますが）．

お答え： Harmonic function, mean value property で検索してみましょう．

質問： 講義ノート 21 ページ，Proposition 3.13 の証明では，不等式 $|X(\boldsymbol{h})| \geqq |\boldsymbol{h}|$ から (3) $X(D_R) \supset D_R$ を導出していますが，この証明方法がわかりません．とてもカンタンな気がするのですが．

お答え： たしかにこれでは少し不足ですね．やってみます．

質問： Proposition 3.12 で φ の定義域を D_R ではなく一般の領域にすると何か不都合なことが起きるのでしょうか．

お答え： 単射性の証明や $X(D_R) \supset D_R$ の証明の部分で，平均値の定理を用いています．これは領域が凸でないと使えません．

質問： カテノイドと円柱の面積比較は私にはかなりの難問でした．円の半径と高さについて場合分けが必要なようで，まだ上手くいっていません．

お答え： おっしゃるとおり，場合分けが必要です．数値計算が必要かもしれません．