

2016年7月22日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 F (MTH.B502) 講義資料 5

前回までの訂正

- 講義ノート 26 ページ, 4 行目: defend \Rightarrow defined
- 講義ノート 31 ページ, 1,3 行目: liner \Rightarrow linear
- 講義ノート 32 ページ, 3 行目:

$$\frac{1 - \nu_3}{\nu_1 + i\nu_2} \Rightarrow \frac{\nu_1 + i\nu_2}{1 - \nu_3}$$

- 講義ノート 32 ページ, 6 行目: here \Rightarrow where

授業に関する御意見

- \mathbb{R}^2 を \mathbb{C} とみなして論理が複素解析に展開していく発想が奇抜に感じます。 山田のコメント: そうですか?
- 提出日が祝日なのを質問し忘れてしまいました。 山田のコメント: こちらもコメントし忘れてしまいました。ごめんなさい。
- この質問が出せなくてごめんなさい。 山田のコメント: いいえ。

質問と回答

質問: 4-1 (3) は結論へ導けませんでした。ヒントの活かし方がよくわかりませんでした。 お答え: やってみましょう。

質問: 共形平坦の共形とはどういうことでしょうか?

お答え: 「共形 conformal」とは角度をたもつこと。2つのリーマン計量 g_1, g_2 が共形的とは $g_2 = e^\sigma g_1$ (σ は関数) とかけること。共形平坦とは平坦計量に (局所的に) 共形的なこと。

質問: D_R の凸性が重要なことは分かったのですが、一般の凸領域ではいけないのでしょうか? $X(D_R) \supset D_R$ のために距離というか直径がほしいとのことですが、集合の直径 $\text{diam}(D) = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in D\}$ ではだめなのでしょうか? お答え: 今回は必要ないので、詰めてはいませんが、diam だけで包含関係は示せないと思います。

質問: Bernstein's theorem で minimal surface eq をみたく \mathbb{R}^2 全体で定義された解は平面だけでしたが、問題 4-2 も解として平面が存在します。4-2 の方程式はどのような曲面が満たすものなのでしょうか?

お答え: 3次元ミンコフスキー時空の平均曲率零曲面。最後の回に時間があったらコメントします。

質問: minimal surface equation を満たす、定義域が非有界な非自明解は存在するのでしょうか?

お答え: $z = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$. これは $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ で定義されています。曲面はカテナイドの上半分。

質問: ベルンシュタインの定理と「全平面で一様連続な正則関数は高々1次の多項式である」ということが、引数の定義域が全平面 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ なことと結論が $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の高々1つい議の多項式であることから似ていると思ったのですが、何か関係あるのでしょうか? お答え: そうですね。どちらも Liouville に帰着されるのでは?

質問: 今回でてきた Bernstein は、集合論の Bernstein の定理の Bernstein と同一人物ですか?

お答え: 同時代ですけど、別人。集合論の方は Felix Bernstein (1878–1956), 今回の Sergei Natonovich Bernstein (1880–1968)。

質問: Riemann surface は Kähler manifold なので、性質はある程度良いものと思われそうですが、研究はほとんどされ尽くしているのでしょうか。それとも現在でも盛んに研究が行われているのでしょうか。

お答え: ケーラー幾何という文脈とはちょっと違ったところで盛んに研究されています。「リーマン面の位相幾何学」とか「タイヒミュラー空間」で検索してごらん。

質問: ϕ (ϕ) と φ (φ) をまったく別物として扱っていますが、一般的なことなのでしょうか? 別の文字と言えどどちらも ϕ なので、両方同時にでてきておどろきました。

お答え: 使わないことはないけれど、お行儀が悪いと思います。計画性がなく、こんなことになってしまったのです。