

2016 年 7 月 29 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 F (MTH.B502) 講義資料 6

お知らせ

- 提出物は今回が最終です。
- 次回の講義が最終です。8 月 9 日も補講の掲示がでているかも知れませんが、9 日には授業を行いません。
- 授業評価アンケートが来ております。提出お願いいたします。なお、科目コードは MTH.B502 です。

前回までの訂正

- 講義ノート 34 ページ, 13/14 行目: holomorhpic \Rightarrow [holomorphic](#) (2 箇所)
- 講義ノート 34 ページ, 下から 3 行目: were \Rightarrow [where](#)
- 講義ノート 37 ページ, 下から 6 行目: fandamental \Rightarrow [fundamental](#)
- 講義ノート 38 ページ, 一番下: Example 5.11 \Rightarrow [Example 2.6](#)
- 講義ノート 39 ページ, 下から 7 行目: Example 5.13 \Rightarrow [Example 2.4](#)
- 講義ノート 40 ページ, 9 行目: (g, ω) \Rightarrow (g, ω)

授業に関する御意見

- 今回は計算スペースの関係で枠におさまりませんでした。
山田のコメント: なるべく(下書きなどして)おさめてほしかった。
- $n = 3$ でもとつてもつらい計算でした。山田のコメント: でしょ。
- 課題をするに当たり、複素解析の知識が足りず「複素数のはなし」という本を読みました。航空学が専門の方が書かれた本で、飛行機の翼のまわりの気流の流れ等の図解などがたくさん描かれており、おもしろそうでした。
山田のコメント: 昔の流体力学の人は関数論詳しいですね。

質問と回答

質問: 曲面という Euclid 空間内のものを扱うにもかかわらず、複素数で考えて、複素解析・正則関数の性質を用いて議論を進めていっていますが、Euclid 空間内の(で、特に実 2 次元な)実数的なものを複素数でとらえなおすことは多いのでしょうか? 複素解析は、ユーザーとしてはしばしば実数を考えているにもかかわらず、正則関数の利便性を使うために、複素数で捉え直して複素解析を用いると聞いたことがあるのですが...

お答え: 解析関数は、複素化したほうがその性質がわかりやすいですね。いずれにせよ「便利なら使う」わけで、四元数なんかも使ったりします。

質問: Weierstrass representation の「representation」は代数でいう「representation」とは違う意味ですか? 例えば作用素環の教科書では、「0 でない準同型写像」と書かれています。それとも、何か同じ意味で通じるものがあるのでしょうか? 複素解析を実数上の議論に帰着させるという意味あいと同じなのでしょうか?

お答え: 単なる「表現公式」(曲面を表す公式)という意味で、深い意味はありません。

質問: Example 5.16 の一般の n の場合を確かめる場合も、普通に留数を計算するのでしょうか。それとも他にうまいやりかたがあるのでしょうか。

お答え: 留数を計算します。それほど難しくありません(部分分数分解をすれば良い)。

質問： 今回の問題のヒントで、 $z^3 = u$ として $\frac{z^2}{(z^3-1)^2} = d\left(\frac{1}{3} \frac{-1}{u-1}\right)$ で留数 0 になると言っていたが、よくわからなかった。

お答え： 極の回りのループで積分すると $-1/(3(u-1))$ の始点と終点の値の差がでてくるが、ループなのでそれらは一致して 0 となる。したがって（積分が消えるから）留数が消える。

質問： Thm 5.10 によると、リーマン面上には mero fnc と holo 1-form の pair ごとに minimal surface が存在するので、非可算無限個存在すると考えてよいのでしょうか。それとも何かの分類定理のようなものが存在していくつかの形にうまく分類できているのでしょうか。また、整理の方法のようなものがあるのでしょうか。たとえば (1) genus の数が同じものは同じような性質をもつ。(2) mero func の pole の次数と holo func の次数の差が同じものは同じ性質をもつ、などなど色々と思いつきますが、いかがなものでしょうか。

お答え： 次回くらいに少し紹介しますが、いろいろと「変なもの」がたくさんあって分類は上手くいきません。有限全曲率を持つ場合、その全曲率が小さいとよくわかったりしますが。