

2016年8月5日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 F (MTH.B502) 講義資料 7

お知らせ

- 返却した提出物には、いままでの合計ポイントが青字で記入されています。このポイントを x とするとき、評点は $5 \times \min\{x, 20\}$ とします。
- 本日が最終回です。ご聴講ありがとうございました。

前回までの訂正

- $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2$ と書くべきところを $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ と書いたようです。
- 講義ノート 41 ページ, 3 行目: that that there exist \Rightarrow that there exist
- 講義ノート 42 ページ, 10 行目: compact \Rightarrow complete
- 講義ノート 46 ページ, 7 行目: vanish \Rightarrow vanishes
- 講義ノート 47 ページ, 3 行目: hols \Rightarrow holds
- 講義ノート 47 ページ, 下から 5 行目: Proposition ?? \Rightarrow Proposition 6.2

授業に関する御意見

- 計算が少ないと不安になります。 山田のコメント: てへ。
- いままで授業ありがとうございました。
- 半年間ありがとうございました。
山田のコメント: こちらこそ。
- 3Q の文系科目もたのしみです (予定ありますように) 山田のコメント: そうですね。全然文系じゃないかも知れません。
- 数年前に「宇宙の幾何」を読んで、Robert Osserman さんの名前を印象深く覚えていたのですが、2011 年に亡くなっていたことは知りませんでした。
山田のコメント: そうなんです。1926 年生まれですから長命ではありましたね。
- 某グリーンランドの観覧車が一部界限で話題らしいです。
山田のコメント: こわそうじゃないですか。
- n 人乗りの浮き輪、いくつくらいの n まで浮き輪として在るんでしょう。
山田のコメント: $n = 3$ までしかみたことがありません。
- 東工大本館の中庭にある講義棟のコンクリートの柱がすべて途中で切れて地面にまで届いていないのはなぜですか? 何かの実験ですか? 東工大の建築学科を少し疑ってしまう光景です。
山田のコメント: うちの建築は変わったものしか建てないので。チーズケーキとか、かまぼことか。

授業評価アンケート自由記述欄から

- 返却された用紙に書かれた字がとても読みづらいです。読める字にしてもらいたいです。
山田のコメント: 幾何学特論 F 第 2 回, 講義資料 2 の最初 (お知らせ) をご覧ください。
- HW の計算が大変だったけど楽しかったです。
- 課題を行うのがたいへんでしたが、することにより理解が助けられたと思います。
- 毎回の課題が面白く、具体例を通じて理解が深まったと思います。
山田のコメント: 手を動かすのは大事ですね。
- 非常に興味深く聞くことができました。次回のテーマをお待ちします。
山田のコメント: そうそうはネタがないんですが。

質問と回答

質問: helicoid は not flat なことから $TC = -\infty$ とのことでしたが, flat な helicoid (八工取りリボン)だと $TC = 0$ です. flat な helicoid は minimal ではないのでしょうか.

お答え: Helicoid は正確に授業で挙げた例のことを言いますので, flat helicoid という言葉はありません. いずれにせよ, 平坦な極小曲面は平面に限ります.

質問: Costa's surface は genus 1, 3 ends で total curvature $= -12\pi$ とのことですが, 一般的に genus, end の数と total curvature の関係を表すような式はみついていますか?

お答え: それが講義で紹介した Osserman's inequality:

$$\frac{1}{2\pi} K dA \leq \chi(\overline{M}) - 2n = 2(2 - 2g) - 2n,$$

ただし g は曲面の種数, n は end の数. 等号成立は各 end が embedded.

質問: Costa surface は PC で曲面を描くことで有用性がわかったが, 他に PC の発達でわかったものはあるのでしょうか.

お答え: まず, 当時のことですので PC ではなく大型コンピュータ (メインフレームかワークステーションか) です. 計算機で目星をつけるのは, そのころからかなり常套手段になっていると思います.

質問: 比較的近年に minimal surface の実例がたくさん発見されていることを知りました. 発見に当たり, コンピュータを駆使する例は多くなっているのでしょうか? それとも手計算ひと筋という研究者も多いのでしょうか.

お答え: コンピュータで見当をつけたり実験をするのは普通のことになっていると思います. 「証明」は手が普通のように思いますが.

質問: ブロー・アップが出てきて代数幾何を感じました. コスタ曲面の方が広中特異点解消定理より年代は後ですが, この定理を利用したというわけではないのでしょうか?

お答え: 具体的な話で「特異点解消定理」よりもっと原始的と思われる.

質問: 3D プリンタで“曲面” (得られるのは厚みつき) を造るとき, 3D モデルを作成することになるとは思います, オススメの CAD など開発環境はなんですか?

お答え: 自分でいじっていないのでわかりません.

質問: 微分幾何学で扱われる大域的な量には全曲率以外にどのようなものがありますか.

お答え: いろいろあるとは思いますが, 位相不変量はたいい大域的ですね. 曲率らしきものの積分はもちろん大域的. たとえば \mathbb{R}^3 の閉曲面に対して, 平均曲率の二乗の積分 (Willmore 汎関数).

質問: いろいろな分野で, 数の拡張として複素数の範囲まで発展させているのですが, わざわざ複素数を考えることの利点は何なのでしょう? \mathbb{C}^3 を \mathbb{R}^6 と考えるのでは不十分なのでしょうか. 確かに虚数単位 i によってきれいな式 ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 等) に出会いますが, 未知の空間 (宇宙空間!? いや現在は宇宙も実際の空間) はやはり想像で終わってしまうのでしょうか?

お答え: 前半と後半の論理的なつながりが分かりません. とくに後半は意味が分からないので, 前半だけレスポンス: (1) 代数学の基本定理が成り立つ (2) 解析性は実より複素で考えた方が自然というのが素人にわかりやすい理由だと思います. また, 回転群 $SO(3)$ はその二重被覆をとって $SU(2)$ と考えるのが自然で, そこからスピンの現れやすさ.

質問: 講義ノート p. 45 l. 11 と p. 46 l. 7 の “vanish” は vanishes にならないのはなぜでしょうか.

お答え: 前半は, 主語が複数だから. 後半は誤り (Thanks).