

講義資料

今回の配布物は

講義資料 2 (4 枚) 講義ノート II (3 枚, 来週の講義内容)

です.

講義資料 2 修正:

- 講義資料 2, 3 ページ, 質問 5 の最後の行: 実施 \Rightarrow 実際
- 講義資料 2, 4 ページ, 質問 17 の回答:
 $F(0) = F(1) = 0 \Rightarrow F(0) = F(1) = f(a + h)$
- 講義資料 2, 5 ページ, 質問 35 の回答:
最後に “これだけでは理由になりませんが.” を追加
- 講義資料 2, 7 ページ, 質問 54 の最後:
わかりません \Rightarrow わかりません

微分積分学第二 (2)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/calc-2/>

2017.12.08

ご意見

ご意見： 黒板の字をもう少し大きく書いていただけませんか。

コメント： 了解．見にくいようなら，前方座席があいているので移動してください．

ご意見： 声をもう少し大きめをお願いします．

コメント： 了解．聞きづらいときはその場で指摘して頂けると有難いです．

ご意見： この提出課題がどれくらいの点数をつけられたかがフィードバックされることはあるのでしょうか．

コメント： 返却します．紛失された場合に備えてコピーを取っておいてくださいね．

ご意見： 配布される資料についている問題の解答は配られるのでしょうか．

コメント： 近日中に「探せば見つかる」状態にします．

ご意見

ご意見： 色々な例を出しながら講義（原文ママ）していただいているので分かりやすいです．

コメント： 講義 を聞いていますか？

ご意見

ご意見： $\sqrt{10} = 3.162$ くらいは暗記すべき． 1.1^4 くらいパスカルの三角形を想像すれば瞬殺ですよ．

コメント： そうですよな．
マチンの公式

$$4 \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1}{5} - \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

も暗記しておくとお便利ですよな．

ご意見： $\sqrt{10}$ なら 3.0, 3.1, 3.2... を順に 2 乗して比べた方が早いと思います (笑)． $C-1$ 級 (原文ママ： C^1 -級のことか) のイメージがつかみずらかった (原文ママ：「づらかった?」) ので，グラフを書いてみたところ f' が不連続とはこういうことなのかとよく分かった．

コメント： 前半：だから試験問題には出さない．授業のネタとして，別の方法で答が確かめられるのでよい．後半：そうですか．

ご意見

ご意見： 数学的な説明ばかりでなく，様々なたとえを交えて説明してくれることはイメージ的な理解の助けになった．

コメント： 喩え話やイメージ的理解はちょっと危険です．

ご意見： 緩急 (?) があり，とても聴きやすい講義だと感じた．途中に面白い小ネタなどをはさんであり，楽しく授業を受けている．

コメント： Thanks. 小ネタはときどきネタ切れします．

ご意見： 一つ一つの小ネタが面白いのですと頭に入ってきます．人を当てる制度が毎回ビクッと身がまえてしまうのでおやめ願いたいです．

コメント： 前半：どうも．ネタ切れ注意です．後半：なんで? (まじレスすると今流行りの「アクティブ・ラーニング」を授業に取り入れる，というプレッシャーがあっただけね．)

ご意見： 数学の講義で学生に指名するのが新鮮でした．90分があったという間．

コメント： だって「アクティブ・ラーニング」なんだから．

ご意見

ご意見： 授業が分かりやすいです。ただし経験上では、授業が分かりやすいと、期末試験が難しくなる傾向がありそうです。期末試験はあまりにも難しくならないように祈っています。

コメント： それほど難しくありません（と山田は思います）。

ご意見： 英語はクソだとぼくも思います。

コメント： そうだよな。ラテン語いいよね。

ご意見： 授業の初めに「中間値の定理，テイラーの定理」と、その日学習することを予め知らせてくれるのはノート作りに役立つので、次回以降もお願いします。

コメント： 中間値の定理ではなく「平均値の定理」です。

ご意見： ご老体なので走らない方がいいですよ！

コメント： 余計なお世話。

ご意見： 無理せず走って下さい。

コメント： ご心配おかけします。

質問から

Q: 0^0 がどうしても不定形なのかがよく分からなかったので、教えて頂きたいです。

Q: 0^0 が存在しないが納得いきません。確かに $0^0 = 1$ となると両辺の \log をとって $0 \log 0 = \log 1$ となり、左辺は $\log 0$ がでてきて存在しない $\log 0$ がでてくるのでおかしい。それで僕は $0^0 = 0$ 説を推します。こうすることで、両辺の \log をとることができないので問題ない。 0^0 存在 (原文ママ) しないのを証明してほしい。

A: 「存在しない」というより「上手く定義できない」
雑に言えば、対数をとると $0 \times \log 0 = \frac{0}{1/\log 0}$ となり、 $0/0$ の形になる。もう少しきちんとすると、関数 f, g がともに 0 に収束するとき、 f^g がどの値に収束するか (あるいは発散するか) が定まらない。実際、任意の正の数 a に対して $f(x) = e^{-a/x^2}$, $g(x) = x^2$ とすると、 $x \rightarrow 0$ のとき $f(x), g(x)$ はともに 0 に近づきますが、 $f(x)^{g(x)}$ は e^{-a} に近づきます。

質問から

- Q: $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ のグラフは滑らかな曲線だが、 0 で微分可能でないとのことでしたが、そうするとグラフが滑らかであるとはどういうことと考えればよいのでしょうか。
- A: 良い質問ですね。さまざまな定義のしかたがあると思うのですが、山田は「曲線がなめらかである」ということを「各点の近くでは微分可能（あるいは C^∞ -級とすることもあります）な関数のグラフと合同である」という定義を採用することが多いです。
- Q: 平均値の定理は开区間で微分可能なきときとなっていますが、閉区間で微分可能とすると $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, $a \leq c \leq b$ と等号がつくようになるのでしょうか。
- A: 閉区間で微分可能と仮定しても結論は同じです。実際「閉区間で微分可能」は「开区間で微分可能」より強い仮定ですから、自動的に（余裕で）同じ結論が成り立ちます。ご質問のように等号をつけると「弱い結論」になってしまいませんか？

質問から

Q: 高校までの間「平均値の定理」の仮定において、連続の方は閉区間であるのに、微分可能の方は开区間でもよいということがずっと謎でした。ある点における微分可能であるための必要十分条件は、その点 a において $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在することであるから、端点においては片側の極限しか考えることができず、この極限が存在しないので、そもそも「閉区間で微分可能」という言葉自体誤りであるという先生もいれば、一方の極限が存在しなくても他方が存在すればその点において微分可能と解釈してよく、「閉区間で微分可能」でもなんら問題はないという先生もいて、混乱してしまいました。実際はどれが正しいのでしょうか。

質問から

定義 区間 $[a, b]$ で定義された関数 f が $[a, b]$ で微分可能であるとは, $[a, b]$ を含む开区間 I で定義された微分可能な関数 F で $[a, b]$ 上では f に一致するものが存在することである.

定理 区間 $[a, b]$ で定義された関数 f が $[a, b]$ で微分可能であるための必要十分条件は, (a, b) で微分可能, かつ極限值

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(b-h) - f(b)}{(-h)}$$

が存在することである.

質問から

Q: $f'(x) = 0$ for $a < x < b \Rightarrow f$ は $[a, b]$ で定数, を証明する際, x を $a < x < b$ をみたす数とし, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ ($\exists c \in a < c < x < b$) (原文ママ:なんか変ですね) $\therefore f(x) = f(a)$ としましたが, $a < x < c < b$ の場合を考えていない気がするのですがよろしいのでしょうか?

A: 結論を導くのに考える必要はありますか?
 x が与えられれば c が存在する. それは区間 (a, b) の中に (実際はもっと狭い区間だが) あるので, 仮定から $f'(c) = 0$ という議論をしています.

質問から

- Q: $f'(\alpha) > 0$ なら α を含むある区間では f は増加する, というのが偽であるのは理解できたのだが, f' が連続なら真である, ということがよく分からなかったので教えていただきたいです.
- A: $A := f'(\alpha) > 0$ かつ f' が連続とすると, $\lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x) = A$ となるので, α の近くでは $f'(x)$ は A に近い. とくに α の十分近くでは $f'(x)$ と A の離れ具合が $A/2$ 以下になる (このあたり “ ε - δ 式” 極限の定義から説明するのがわかりやすいかも知れません). このような区間では $f'(x) > 0$ だから定理 1.9 が使える.

質問から

Q: テイラーの定理について, はじめに $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5$ とした具体例とその後の一般化された定理 1.19 (テイラーの定理) との対応がわからなくなりました. $f(1.1)$ を求めるために

$f(x) = a_4(x-1)^4 + \dots + a_0$ としていますが, これはテイラーの定理において $h = x - 1$, $a = 1$, $n = 3$ としているのでしょうか. この場合, 剰余項 $R_4(x-1) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(1) + \theta(x-1)(x-1)^4$ となりますが, $a_4 = \frac{1}{4!}f^{(4)}(1)$ より $\theta = 0$ となり, $0 < \theta < 1$ を満たしていないように思います.

A: $f^{(5)}(x)$ は恒等的に 0, $f^{(4)}(x)$ は定数関数なので

$$\begin{aligned}f(1+h) &= f(1) + f'(1)h + \dots + \frac{1}{3!}f^{(3)}(1)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(1)h^4 + R_5(h) \\&= f(1) + f'(1)h + \frac{1}{2}f''(1)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(1)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(1)h^4 \\f(1+h) &= f(1) + f'(1)h + \frac{1}{2}f''(1)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(1)h^3 + R_4(h) \\&= f(1) + f'(1)h + \frac{1}{2}f''(1)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(1)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\theta h)h^4 \\&= f(1) + f'(1)h + \frac{1}{2}f''(1)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(1)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(1)h^4\end{aligned}$$

質問から

Q: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5$ に対し $f(1.1)$ を求めようとしたとき,

$$f(x) = \boxed{\text{A}}(x-1)^4 + \boxed{\text{B}}(x-1)^3 + \boxed{\text{C}}(x-1)^2 + \boxed{\text{D}}(x-1) + \boxed{\text{E}} \quad (*)$$

として, それぞれの箱に $\frac{1}{4!}f^{(4)}(1)$, $\frac{1}{3!}f^{(3)}(1)$, $f'(1)$, $f(1)$ を当てはめるという一連の流れが理解できませんでした. テイラーの定理を理解するためにも必要なことだと思うので, 時間があればもう一度詳しい解説を聞かせていただきたいと思います.

A: (*) の両辺に 1 を代入すると, $x-1=0$ だから $f(1) = \boxed{\text{E}}$. (*) を x で微分すると

$$f'(x) = 4\boxed{\text{A}}(x-1)^3 + 3\boxed{\text{B}}(x-1)^2 + 2\boxed{\text{C}}(x-1) + \boxed{\text{D}}$$

$$f'(1) = \boxed{\text{D}}$$

さらに

$$f''(x) = 4 \times 3 \boxed{\text{A}}(x-1)^2 + 3 \times 2 \boxed{\text{B}}(x-1) + 2 \boxed{\text{C}} \quad f''(1) = 2 \boxed{\text{C}}$$

$$f^{(3)}(x) = 4 \times 3 \times 2 \boxed{\text{A}}(x-1) + 3 \times 2 \boxed{\text{B}} \quad f^{(3)}(1) = 3! \boxed{\text{B}}$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \times 3 \times 2 \boxed{\text{A}} \quad f^{(4)}(1) = 4! \boxed{\text{A}}$$

質問から

- Q: テイラーの定理の証明が理解できないので解説して欲しいです．具体的に微分したあとに，ロルの定理をどのように適用すればがわかりません．
- A: $F(0) = F(1) = f(a+h)$ なので $F'(\theta) = 0$ となる $\theta \in (0, 1)$ が存在する．ここで $F'(\theta) = 0$ という式を f を用いて書き直すと，テイラーの定理の結論が得られる．

$$F(t) := \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^k \right) + (1-t)^{n+1} \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right)$$

質問から

- Q: テイラー定理（原文ママ）は陰関数，3次元の方程式でも応用できるか知りたいです（線形写像も?）
- A: どのような対象かを明示しましょう．具体例も挙げましょう．そのうえでどのような定理が成り立つか，期待できる結論を書いてみましょう．
- Q: テーラー展開などが私たちの身近で使われている場面をもっと知りたいです．
- A: あなた達の「身近」に何があるかわからないのでお答えできません．

質問から

- Q: 近似値を求めるときに，小数第 k 位が求まるとき n の値はいくつにすべきかは決まっているのでしょうか．
- A: 関数や変数の値による．試行錯誤をする．
- Q: テイラー展開して近似するさいに，予め切り落とす桁を決めるのではなく，あるけたまでの数字を求めたい（有効数字）時は大雑把に桁を求めてから切り落とす桁を決めるのでしょうか．せっかくの近似計算なのに計算が二度手間になるのがひっかかりました．
- A: きちんと読み取れないのですが「桁」という語を2つの意味で使っていますか？いずれにせよ「試行錯誤」．たった二度の手間なら大したことはない．

質問から

Q: ロピタルの定理において $c \in (a, b)$ f を (a, b) で微分可能な関数として $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ であり $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が発

散する場合, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ が発散することを証明しようとしたがうまくいきません. 実際にこの命題はなり立つのでしょうか.

A: $c \in (a, b)$ で f が微分可能なら $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ は $f(c) = 0$ と同じ, ということは納得していますね (確認). g の微分可能性も仮定すべきですね.

「発散する」とは「収束しない」という意味? (それが普通)

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x, \quad c = 0$$

質問から

- Q: 1-7 の問題にあるロピタルの定理は $0/0$ の不定形だけでなく ∞/∞ の不定形でも適用できると聞いたことがあるのですが、それがどうしてか教えて欲しいです。
- A: テキストにも（事実だけ）書いてありますね。正しいのですが、証明はちょっと面倒くさい。ものすごくいい加減に説明すると ∞/∞ は、分母・分子の逆数をとれば $0/0$ になりますね。

質問から

Q: 講義資料3 ページ目, $x \rightarrow 0$ を導く過程で $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ を用いて $n \rightarrow \infty$ としているが, 連続性を示す際に, 連続的でない数列を用いて証明を行うと, おそらく結果自体は正しいのですが, 納得ができないので, 数列を用いていい理由を分かりやすく教えて欲しい.

定理 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ が成り立つための必要十分条件は a に収束する任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, 数列 $\{f(x_n)\}$ が A に収束することである.

系 $x \rightarrow a$ のときに $f(x)$ が A に収束しないための必要十分条件は, a に収束するある数列 $\{x_n\}$ で, $\{f(x_n)\}$ が A に収束しないものが少くとも一つ存在する.