2017 年 12 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二講義資料 2

お知らせ

- 提出物は返却しております．なお，赤字で書かれたコメントは，主として山田用のメモですので読めないかも知れません．コメント，質問に対する回答はこの資料にあります．

前回までの訂正

- 12 月 4 日の講義での発言「講議中（ご指摘いただいた方の原文ママ：間違いです！）に連絡したことは伝わっていると思っておいてください」⇒「講義中に連絡したことは伝わっていると思っていると思っておいてください」.
- 12 月 4 日の講義で例に挙げた多項式 $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5$ に対して $f(1) = 2$ と書きましたが $f(1) = 0$ の誤りである，というご指摘がありました．そのとおりです．
- 提示資料のフッタが旧科目名（微分積分学第二 B）になっていました．
- 提示資料の表紙の URL が 2015 年度のままになっています．
- 提出用紙の学籍番号欄のハイフンは旧様式の学籍番号のためのものでした．
- 講義資料 0，3 ページ 7 行目：$\mathrm{Sinh}^{-1}\,y = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \Rightarrow \mathrm{Sinh}^{-1}\,y = \log(y + \sqrt{1 + y^2})$.
- 講義資料 0，4 ページ（授業日程）表題：2017 年度 ⇒ 2018 年度
- 講義資料 0，4 ページ（授業日程）第 13 回の日付：02 月 01 日 ⇒ 02 月 02 日
- 講義資料 1, 1 ページ，下から 9 行目：わかったつもりにの ⇒ わかったつもりの
- 講義資料 1, 2 ページ，下から 7 行目：とけない ⇒ 解けない
- 講義ノート I，6 ページ，下から 8 行目：c 含む ⇒ c を含む
- 講義ノート I，7 ページ，下から 2 行目：少く ⇒ 少なく（送り仮名の規則からするとどちらでもよいのかも知れませんが，このノートの他の場所では「少なく」としているので）
- 講義ノート I，9 ページ，7 行目：$(n + 1)$ 回 ⇒ $(n + 1)$ 階

授業に関する御意見

- 黒板の字をもう少し大きく書いていただけないでしょうか.
  山田のコメント： 了解．見にくいようなら，前方座席があいているので移動してください．
- 声をもう少し大きめでお願いします．　**山田のコメント：** 了解．聞きづらいときはその場で指摘して頂けると有難いです．
- この提出課題がどれくらいの点数をつけられたかがフィードバックされることはあるのでしょうか.
  山田のコメント： 返却します．紛失された場合に備えてコピーを取っておいてくださいね．
- 配布される資料についている問題の解答は配られるのでしょうか.
  山田のコメント： 近日中に「探せば見つかる」状態にします．
- 色々な例を出しながら講議（原文ママ）していただいているので分かりやすいです.
  山田のコメント： 講義 を聞いていますか？
- $\sqrt{10} = 3.162$ くらいは暗記すべき．1.1^4 くらいパスカルの三角形を想像すれば瞬殺ですよ.
  山田のコメント： そうですよね．マチンの公式 $4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ も憶えておくべきですよね．
- $\sqrt{10}$ なら 3.0, 3.1, 3.2... を順に 2 乗して比べた方が早いと思います（笑）．$C - 1$ 級（原文ママ：C^1-級のことか）のイメージがつかみずらかった（原文ママ：「づらかった」が正しい仮名遣いのようです）ので，グラフを書いてみたところ f' が不連続とはこういうことなのかとよく分かった．　**山田のコメント：** 前半：だから試験問題には出さない．授業のネタとして，別の方法で答が確かめられるのでよい．後半：そうですか.
- めちゃくちゃ良い授業だと思います．紙忘れてしまって申しわけないです.
  山田のコメント： 用紙不備ですね．指定用紙は講義 web ページ，OCW からダウンロードできます．

- おもしろいです．/ 近似の話がおもしろい． **山田のコメント：** そう?
- 先生の授業はとてもわかりやすく，今はなんとかついていけます．これからもよろしくお願いします!
  山田のコメント： こちらこそよろしく．
- 難解に見える「テイラーの定理」を高校までの知識から導入を行い，定理の誕生が自然なことである旨を教えて頂けた為，すんなり内容が理解しやすくなりました．授業は楽しくきかせていただいております．
  山田のコメント： とりあえずお楽しみください．
- 平均値の定理の応用（利用）法の紹介は頭の整理に大いに役立ちました．ありがとうございました．
  山田のコメント： どういたしまして．
- 基本的なことからちゃんとやってくれるので個人的に好きな授業です．
  山田のコメント： いつまでもこのペースでいけるかは謎．
- 高校の復習から授業を始めてくださったおかげで授業に集中して取り組むことができました．
  山田のコメント： それはよかった．
- 大学の数学の講義で初めて眠気が来ませんでした．
  山田のコメント： 前日良く寝たのか，講義の声がうるさかったか．
- 数学的な説明ばかりでなく，様々なたとえを交えて説明してくれることはイメージ的な理解の助けになった．
  山田のコメント： 喩え話やイメージ的理解はちょっと危険です．
- 緩急 (?) があり，とても聴きやすい講義だと感じた．途中に面白い小ネタなどをはさんであり，楽しく授業を受けられている．
  山田のコメント： Thanks. 小ネタはときどきネタ切れします．
- 一つ一つの小ネタが面白いのですっと頭に入ってきます．人を当てる制度が毎回ビクッと身がまえてしまうのでおやめ願いたいです．
  山田のコメント： 前半：どうも．ネタ切れ注意です．後半：なんで?（まじレスすると今流行りの「アクティブ・ラーニング」を授業に取り入れろ，というプレッシャーがあってね.）
- 数学の講義で学生に指名するのが新鮮でした．90 分があっという間．
  山田のコメント： だって「アクティブ・ラーニング」なんだから．
- 例もあったので分かりやすかった． **山田のコメント：** そう?
- 分かりやすいとおもいます． **山田のコメント：** そう?
- 授業が分かりやすいです．ただし経験上では，授業が分かりやすいと，期末試験が難しくなる傾向がありそうです．期末試験はあまりにも難しくならないように祈っています．
  山田のコメント： それほど難しくないです（と山田は思います)．
- 英語はクソだとぼくも思います． **山田のコメント：** そうだよね．ラテン語いいよね．
- 授業の初めに「中間値の定理，テイラーの定理」と，その日学習することを予め知らせてくれるのはノート作りに役立つので，次回以降もお願いします．
  山田のコメント： 中間値の定理ではなく「平均値の定理」です．
- ご老体なので走らない方がいいですよ!
  山田のコメント： 余計なお世話．
- 無理せず走って下さい．
  山田のコメント： ご心配おかけします．
- 1∼3Q は板書が汚くて見づらかったけれど，この授業は非常に見やすくて良いです．
- 先生の黒板の字がキレイで見やすいです．
- 板書がきれいでわかりやすかったです．
- 板書が見やすいです．
  山田のコメント： 今回はそうでしたね `:-P`
- 特になし．/特にないです．
  山田のコメント： me, too.

質問と回答

質問 1： $f\colon x \mapsto \sqrt[3]{x}$ のグラフは滑らかな曲線だが，0 で微分可能でないとのことでしたが，そうするとグラフが滑らかであるとはどういうことと考えればよいのでしょうか.

お答え： 良い質問ですね．さまざまな定義のしかたがあると思うのですが，山田は「曲線がなめらかである」ということを「各点の近くでは微分可能（あるいは C^∞-級とすることもあります）な関数のグラフと合同である」という定義を採用することが多いです.

質問 2： 「グラフがなめらかである $\Rightarrow$ 微分可能」は成り立たないのは $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の例で分かったが，「微分可能 $\Rightarrow$ グラフがなめらかである」の真偽はどうなのか．私は真だと思うが，証明ができないので授業でやってほしい.

お答え： 「曲線がなめらかである」という言葉をきちんと定義せずに説明したのでどちらの主張も本当はきちんと証明できませんね．質問 2 のように定義すると，微分可能な関数のグラフは自動的になめらかになります.

質問 3： $f(x) = \sqrt[3]{x}$ は微分可能でないがなめらかな関数（原文ママ：なめらかな関数とは言っていない．グラフがなめらか）の例だとして挙げられていたがそもそもなめらかの定義がわからなかった.

お答え： そうですね，平面上の曲線が「なめらか」ということはここでは定義していません．質問 2 の回答参照.

質問 4： 平均値の定理は開区間で微分可能なときとなっていますが，閉区間で微分可能とすると $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, $a \leqq c \leqq b$ と等号がつくようになるのでしょうか.

お答え： 閉区間で微分可能と仮定しても結論は同じです．実際「閉区間で微分可能」は「開区間で微分可能」より強い仮定ですから，自動的に（余裕で）同じ結論が成り立ちます．ご質問のように等号をつけると「弱い結論」になってしまいませんか？

質問 5： 高校までの間「平均値の定理」の仮定において，連続の方は閉区間であるのに，微分可能の方は開区間でもよいということがずっと謎でした．ある点における微分可能であるための必要十分条件は，その点 a において $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在することであるから，端点においては片側の極限しか考えることができず，この極限が存在しないので，そもそも「閉区間で微分可能」という言葉自体誤りであるという先生もいれば，一方の極限が存在しなくても他方が存在すればその点において微分可能と解釈してよく，「閉区間で微分可能」でもなんら問題はないという先生もいて，混乱してしまいました．実際はどれが正しいのでしょうか.

お答え： **定義：** 区間 $[a,b]$ で定義された関数 f が $[a,b]$ で微分可能であるとは，$[a,b]$ を含む開区間 I で定義された微分可能な関数 F で $[a,b]$ 上では f に一致するものが存在することである．**定理：**区間 $[a,b]$ で定義された関数 f が $[a,b]$ で微分可能であるための必要十分条件は，(a,b) で微分可能，かつ極限値 $\displaystyle\lim_{h\to+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $\displaystyle\lim_{h\to+0} \frac{f(b-h)-f(b)}{(-h)}$ が存在することである.

質問 6： 平均値の定理は授業で解説していたように，グラフでどう表されているか理解できましたが，コーシーの平均値の定理はグラフで表すようになるのかが気になりました.

お答え： 無理に表すこともできないではないですが，ここではグラフを忘れた方がよいと思います.

質問 7： $f'(x) = 0$ for $a < x < b \Rightarrow f$ は $[a,b]$ で定数，を証明する際，x を $a < x < b$ をみたす数とし，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ $(\exists c \in a < c < x(< b))$ （原文ママ：なんか変ですね）$\therefore f(x) = f(a)$ としましたが，$a < x < c < b$ の場合を考えていない気がするのですがよろしいのでしょうか?

お答え： 結論を導くのに考える必要はありますか? x が与えられれば c が存在する．それは区間 (a,b) の中に（実際はもっと狭い区間だが）あるので，仮定から $f'(c) = 0$ という議論をしています.

質問 8： $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$ の $R_{n+1}(h)$ までが〜項，$R_{n+1}(h)$ が剰余項という所が分からなかったです. **お答え：**主要項.

質問 9： テーラーの定理のところで $R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(a+\theta h)$ $(0 < \theta < 1)$ で $f(a+h)$ をテーラー展開した際の $n+2$ 項目以降の全ての和となっていることがわからなかった.

お答え： ここでテーラー展開（無限級数展開）をもちだすのは筋がわるい（次回少し説明する）．剰余項はただの「誤差」と見なすのが自然だと思います.

質問 10： 剰余項の θ を求める高度な手法は存在しないのでしょうか.

お答え： 考えている関数によるでしょうね．テイラーの定理のよいところは θ が「存在する」ことからいろいろなことが言えることです（と講義でも述べました）.

質問 11： テイラーの定理について，はじめに $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5$ とした具体例とその後の一般化された定理 1.19（テイラーの定理）との対応がわからなくなりました．$f(1.1)$ を求めるために $f(x) = a_4(x-1)^4 + \dots a_0$ としていますが，これはテイラーの定理において $h = x-1$，$a = 1$，$n = 3$ としているのでしょうか．この場合，剰余項 $R_4(x-1) = \frac{1}{4!}f^{(4)}1 + \theta(x-1)(x-1)^4$ となりますが，$a_4 = \frac{1}{4!}f^{(4)}(1)$ より $\theta = 0$ となり，$0 < \theta < 1$ を満たしていないように思います．

お答え： $n = 4$ とすると $f^{(5)}$ が恒等的に 0 なので，定理 1.19 の主張が成り立っていますね．$n = 3$ のときですが，実は $f^{(4)}$ は定数なので $f^{(4)}(1) = f^{(4)}(1/2)$ が成り立っています．したがって（たとえば）$\theta = 1/2$ とすれば定理が成り立っていることがわかります．定理の主張は，条件を満たす θ が少なくとも 1 つ存在すればよいわけです．

質問 12： $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5$ に対し $f(1.1)$ を求めようとしたとき，$f(x) = \boxed{\mathrm{A}}(x-1)^4 + \boxed{\mathrm{B}}(x-1)^3 + \boxed{\mathrm{C}}(x-1)^2 + \boxed{\mathrm{D}}(x-1) + \boxed{\mathrm{E}}$ として（山田注：A–E は山田が追加しました），それぞれの箱に $\frac{1}{4!}f^{(4)}(1)$，$\frac{1}{3!}f^{(3)}(1)$，$\frac{1}{2!}f''(1)$，$f'(1)$，$f(1)$ を当てはめるという一連の流れが理解できませんでした．テイラーの定理を理解するためにも必要なことだと思うので，時間があればもう一度詳しい解説を聞かせていただきたいと思います．

お答え： 箱のある式の両辺に $x = 1$ を代入すると $(x-1)^k$ が全て 0 になるので，$f(1) = \boxed{\mathrm{E}}$．さらに，$f'(x) = 4\boxed{\mathrm{A}}(x-1)^3 + 3\boxed{\mathrm{B}}(x-1)^2 + 2\boxed{\mathrm{C}}(x-1) + \boxed{\mathrm{D}}$ なので $f'(1) = \boxed{\mathrm{D}}$．もう一度微分して $f''(x) = 4\cdot 3\boxed{\mathrm{A}}(x-1)^2 + 3\cdot 2\boxed{\mathrm{B}}(x-1) + 2\boxed{\mathrm{C}}$ なので $f''(1) = 2\boxed{\mathrm{C}}$．これを繰り返す．

質問 13： $f(1) = 2$ じゃないです．$f(1) = 0$ です．($f(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x + 5)$ なので．$f(1.1)$ に関して $x - 1 = 0.1$，$x^3 - 2x^2 + x + 5 = x^2(x-2) + x + 5 = 1.21 \times (-0.9) + 6.1 = 5.111$ だから 5.111，の方が早いと思いました．やはり Taylor の定理は身近な計算よりも高次多項式の近似に向いているのかな，と僕は思います．

お答え： 誤りのご指摘ありがとう．$f(1.1)$ の計算って身近ですかね．

質問 14： $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5$ を（中略）に変換するとき（中略）係数比較によって求めた方が効率的だと思ったのですが，授業中の解法のメリットなどあれば（授業中の解法を使った方が簡単な場面など）教えて下さい．

質問 15： （略：同様に係数比較をして求めている）

お答え： テイラーの定理の主要項の決まり方を簡単な例で説明できる．

質問 16： 9 ページのテイラー展開の証明（原文ママ：講義ノートでは「テイラー展開」という語を使っていない．テイラーの定理のことと思われます）において $F(t) =\sim$ の式の意味が具体的な数字を入れてみても理解出来ませんでした．

お答え： そうですか（としか言いようがない）．ただこうおいただけです．

質問 17： テイラーの定理の証明が理解できないので解説して欲しいです．具体的に微分したあとに，ロルの定理をどのように適用すればがわからないです．

お答え： $F(0) = F(1) = f(a+h)$ なので $F'(\theta) = 0$ となる $\theta \in (0,1)$ が存在する．ここで $F'(\theta) = 0$ という式を f を用いて書き直すと，テイラーの定理の結論が得られる．

質問 18： テイラーの定理に関して．今回は $x - 1 = 0.1$ という場合での例を授業で扱ったと思いますが，$0.1 < 1$ であるから昇べきの順にすることで都合がよくなるということですよね? もし $x = 5.1$ などにした場合は降べきの順にするのが自然でしょうか．それともそもそもテイラーの定理は $x - k$ の値がとても小さい場合のためのものであるからあまり大きな値はいれないのでしょうか．

お答え： たとえば $f(5.1)$ を求めるなら，$(x-5)$ に関する展開をするのでしょうね．テイラーの定理の主張では h の大きさになにも制限がないのですが，「小さい h」に興味があることが多いようです（例題で，そうでない場合を紹介するかもしれません）．

質問 19： テイラーの定理の剰余項 $R_{n+1}(h)$ は微小量として扱えますか（h が小さい時だけ？）

質問 20： テーラーの定理は近似値を求める以外にどういった時に使用するのですか?

質問 21： テイラーの定理は，近似計算以外の用途もあるのですか．

お答え： 次回のテーマです．

質問 22： テイラー定理（原文ママ）は陰関数，3 次元の方程式でも応用できるか知りたいです（線形写像も?）

お答え： どのような対象かを明示しましょう．具体例も挙げましょう．そのうえでどのような定理が成り立つか，期待できる結論を書いてみましょう．

質問 23： テーラー展開などが私たちの身近で使われている場面をもっと知りたいです．

お答え： あなた達の「身近」に何があるかわからないのでお答えできません．

質問 24： 近似を授業で扱ったが，近似の精度というのは，他の近似をして比較するほかに客観的に評価することはできるのでしょうか．

お答え： 授業で実際にやってみせたのは客観的な評価だと思いますが．

質問 25： テイラーの定理の近似は n が大きくなるにつれて近似値は必ず小さくなるのでしょうか．

お答え： 近似値は小さくなりません．誤差が小さくなるかということでしょうか．次回少し扱います．

質問 26： 近似値を求めるときに，小数第 k 位が求まるとき n の値はいくつにすべきかは決まっているのでしょうか．

お答え： 関数や変数の値による．試行錯誤をする．

質問 27： テイラー展開して近似するさいに，予め切り落とす桁を決めるのでなく，あるけたまでの数字を求めたい（有効数字）時は大雑把に桁を求めてから切り落とす桁を決めるのでしょうか．せっかくの近似計算なのに計算が二度手間になるのがひっかかりました．

お答え： きちんと読み取れないのですが「桁」という語を 2 つの意味で使っていますか？いずれにせよ「試行錯誤」．たった二度の手間なら大したことない．

質問 28： 例 1.6 のような関数 $f(x)=\sqrt{x}$ とおいて近似する方法を自ら導けるようなコツはありますか？

お答え： 場数を踏む．

質問 29： 平均値の定理を利用して $\sqrt{10}$ を求めたが，$\sqrt{13}$ とか $\sqrt{9}$ にも $\sqrt{16}$ にも近くない数だと適用できないのか．

お答え： 材料は全て持っているはず．試してごらんなさい．

質問 30： テイラーの定理での近似計算よりはやく近似値がでる方法はあるのか．

お答え： 問題によっては．

質問 31： $f'(\alpha)>0$ なら α を含むある区間では f は増加する，というのが偽であるのは理解できたのだが，f' が連続なら真である，ということがよく分からなかったので教えていただきたいです．

お答え： $A:=f'(\alpha)>0$ かつ f' が連続とすると，$\lim_{x\to\alpha} f'(x)=A$ となるので，α の近くでは $f'(x)$ は A に近い．とくに α の十分近くでは $f'(x)$ と A の離れ具合が $A/2$ 以下になる（このあたり “ε-δ 式” 極限の定義から説明するのがわかりやすいかも知れません）．このような区間では $f'(x)>0$ だから定理 1.9 が使える．

質問 32： 高校での単調増加の説明と本当の単調増加の説明の違いがよく分からなかった．

お答え： 「単調増加の説明」は同じだと思います．

質問 33： p5 で f は単調増加というのがあるが，広義的にそうである時と，狭義的にそうである時に違いは表れるのか（原文ママ：誤字と思う）疑問に思った．p9 において C^1-級である説明 C^n 級である説明があるが C というのに何か意味があるのか気になる．テイラーの定理で上手く数を評価する方法を知りたい．

お答え： 最初：この講義で単調増加の定義は狭義（$x_1<x_2$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$）．“p5 で” というのはターゲットが広すぎるので何を聞いているのか分からない．二番目：continuous；三番目：質問が曖昧すぎて何を聞いているのかわからない．

質問 34： ロピタルの定理において $c\in(a,b)$ f を (a,b) で微分可能な関数として $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$ であり $\lim_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が発散する場合，$\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が発散することを証明しようとしましたがうまくいきません．実際にこの命題はなり立つのでしょうか．また $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\Leftrightarrow \lim_{x\to a}|f(x)-f(a)|=0$ は自明としてよいのでしょうか．

お答え： 前半：$c\in(a,b)$ で f が微分可能なら $\lim_{x\to c} f(x)=0$ は $f(c)=0$ と同じ，ということは納得していますね（確認）．g の微分可能性も仮定すべきですね．さらに「発散する」とは「収束しない」という意味でしょうか（それが普通の使い方ですが）．とすると成立しません．$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$（$x=0$ のときは $f(0)=0$ とする），$g(x)=x$，$c=0$ が反例になります．「発散する」を「正の無限大に発散する」という意味で使っているのなら成立します（しかし，この言葉の使い方は標準的ではありません）．後半：この講義の後半で極限の定義をしますが，その定義から明らかになります．

質問 35： I-7 の問題にあるロピタルの定理は 0/0 の不定形だけでなく ∞/∞ の不定形でも適用できると聞いたことがあるのですが，それがどうしてか教えて欲しいです．

お答え： テキストにも（事実だけ）書いてありますね．正しいのですが，証明はちょっと面倒くさい．ものすごくいい加減に説明すると ∞/∞ は，分母・分子の逆数をとれば 0/0 になりますね．

質問 36： 講義資料 3 ページ目，$x\to 0$ を導く過程で $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ を用いて $n\to\infty$ としているが，連続性を示す際に，連続的でない数列を用いて証明を行うと，おそらく結果自体は正しいのでしょうが，納得ができないので，数列を用いていい理由を分かりやすく教えて欲しい．

お答え： **定理：** $\lim_{x \to a} f(x) = A$ が成り立つための必要十分条件は a に収束する任意の数列 $\{x_n\}$ に対して，数列 $\{f(x_n)\}$ が A に収束することである．

この定理の言い換えとして**系：** $x \to a$ のときに $f(x)$ が A に収束しないための必要十分条件は，a に収束するある数列 $\{x_n\}$ で，$\{f(x_n)\}$ が A に収束しないものが少くとも一つ存在する．

この講義の後半で極限の理論を扱うときに一度言及します．

質問 37： C^k-級とハイフンのない C^k 級は同じ意味ですか.

お答え： はい．同じ意味です．同じ文脈で混用するとおかしいですが.

質問 38： プリント p9 にある「1 階連続微分可能」ですが，なぜ “回” じゃなくて “階” なのかがしっくりきません（国語が苦手です...）このときの意味は回数というようり段階というイメージなのでしょうか．染川先生のレポートでも出てきて，そのときに漢字ミスなのかな? と思ったけどプリントに “階” と書いてあったので，元々そう使われているのかと思いました.

お答え： なぜか “階” を使うことが多いようですが “回” を使うこともあります.

質問 39： e.g. と example を使い分けている意味はなんですか?

お答え： “e.g.” は “for example” と置き換えられる文脈で使います．“Example” はパラグラフの見出し.

質問 40： 0^0 がどうして不定形なのかがよく分からなかったので，教えて頂きたいです.

お答え： 雑に言えば，対数をとると $0 \times \log 0 = \frac{0}{1/\log 0}$ となり，0/0 の形になる．もう少しきちんというと，関数 f, g がともに 0 に収束するとき，f^g がどの値に収束するか（あるいは発散するか）が定まらない．実際，任意の正の数 a に対して $f(x) = e^{-a/x^2}$，$g(x) = x^2$ とすると，$x \to 0$ のとき $f(x)$, $g(x)$ はともに 0 に近づきますが，$f(x)^{g(x)}$ は e^{-a} に近づきます.

質問 41： 0^0 が存在しないが納得いきません．確かに $0^0 = 1$ となると両辺の log をとって $0 \log 0 = \log 1$ となり，左辺は $\log 0$ がでてきて存在しない $\log 0$ がでてくるのでおかしい．それで僕は $0^0 = 0$ 説を推します．こうすることで，両辺の log をとることができないので問題ない．0^0 存存（原文ママ）しないのを証明してほしい.

お答え： 講義では「0^0 が存在しない」という言い方はしていません.「不定形」であってうまく定義できない，と述べたのではないでしょうか.「おかしい」とあなたが言っている理由も講義で説明したものとは違うようです.

質問 42： 前の授業で 0^0 に関する話をしていました．自分は何かに関する 0 の値は，その何かが自然数のときの定義に合うように（自然なように）決められるのでは，と考えていました．どう思いますか?

お答え： ご質問の意味が読み取れません．もう少し具体的に書けませんか？

質問 43： 最後の問題の I-2 なんですが，平均値の定理を使うのかと思うのですが，どのように証明するのかわかりません．感覚的かも知れないんですが，当たり前のような気がします．数学的に説明する方法を説明してほしいです.

お答え： 時刻 $10 + t$ 時に工太郎くんが東京 IC から $f(t)$km の地点にいたとして，区間 $[0, 3]$ で f に対してん平均値の定理を用いる.

質問 44： 資料 10 ページ, I-11 の問題で h はどうすればよいいのでしょうか.

お答え： h のまま.

質問 45： プリントのさいごのほうに問題がいくつかのっていますが本授業を理解するにはどんな問題をどのくらい解いておけばよいのか知りたいです.

お答え： 少くとも問題 I は全部.

質問 46： 微分可能だがその導関数が連続じゃない関数は異様に思えるが，他に特徴はないのか? どこかで応用されているのか?

お答え： ご質問のような関数はあまりにもたくさんあって，それらに共通な性質は「導関数が連続でない」ことしかないように思います.

応用はあまり知りませんが，むしろ「微分を考えるときは C^1-級くらいを仮定していたほうが自然」ということを説明するための道具と思うのがよいかと思います.

質問 47： 微分可能ならば $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ が存在する，に関して分からなかった（以下略).

お答え： ご質問の極限が存在することが「微分可能である」ということの定義です.「微分可能ならば...」は間違ってはいませんが，この極限が存在することと微分可能であることは同じことです.

質問 48： 平均値の定理が近似計算で有用なことがわかりましたが，他に実用の観点でこの定理が重要になる例はありますか？

お答え： ある区間で導関数が正なら関数は単調増加．これって微分を実用的にしている基本的な定理では？このことを

示すのに平均値の定理が使われています，というのは講義でやったことですよね．

質問 49： 平均値の定理の条件で，連続は閉区間，微分可能は開区間なのがなぜか気になった．

お答え： 講義で説明しました．$f(x)=\sqrt[3]{x}\ (0 \leqq x \leqq 1)$ のようなものも対象にできる．

質問 50： 数学は他の科目に比べ厳密性が要求される科目であるため，定理が出てきた時は証明すべきである．私の誤りがなければテーラーの定理の証明が非常に不十分であったと記憶しているので，そこを直して欲しいと思いました．

お答え： そのために講義ノートを配布している．読んでから言ってください．

質問 51： 個人的には平均値の定理の証明をして欲しかったです．高校のときは「$a<x<b$ で $f(x)$ が連続のとき（中略）接線が必ず引ける」という原理みたいに習ったので，数式で証明してみたい．

お答え： 講義ノート 7 ページ．12 月 1 日に配布して 4 日までに大雑把でもよいから目を通して欲しい，といったやつ．

質問 52： ロルの定理の内容は理解は何とか理解できましたが（山田注：原文ママ．なんか日本語が変ですね）コーシーの平均値の定理などの証明で使うときにどう使って証明すればよいのか分からなかったです．テイラーの定理などで近似を使うときは何項まで計算するのが基本なのか少し気になりました．

お答え： 前半：講義ノート見ました？後半：気になっただけ？

質問 53： 定理 1.19 で，$f(a+h)=\sum(\text{略})+R_{n+1}(h)$ をみたす $R_{n+1}(h)$ は $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$ って書けるのですか?

お答え： 書けるのが定理の主張ではないでしょうか．

質問 54： テイラーの定理の式において，式の最後の項 $R_{n+1}(h)$ がよくわからなかったです．$R_{n+1}(h)$ がどうして $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)h^{n+1}$ でなく $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$ なのかわかないです．

お答え： それが定理の主張であって，示されたことなのでしようがないですね．もしも剰余項の形がご質問のようになるなら，すべての関数は多項式になってしまいませんか?

質問 55： 最後の $R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$ をみたす $\theta\ (0<\theta<1)$ が存在するという話がよくわかりませんでした．

お答え： そこに書いてあるままです．先入観をもたずきちんと読みましょう．

質問 56： テーラー展開の最後の項の $R_{n+1}(x)$ だけ，違う形になるのがあまり理解できなかったです．

お答え： そうですか（としかいいようがない）．

質問 57： R_{n+1} は常に存在するのでしょうか．

お答え： それがテイラーの定理の主張です．

質問 58： 剰余項が $R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$ で表すことができるという証明がよくわからなかった．

お答え： 講義では証明を紹介していませんね．講義ノートをみましょう．

質問 59： どうして $\sqrt{10}$ を使って平均値の定理を説明したのですか? すごくわかりやすかったです．

お答え： わかりやすかったらよいのでは?

質問 60： 凸不等式を使う証明やテイラーの定理からの証明などで n 次元の平均値の定理には色々なアプローチがあることが分かりました．$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ のように単なる式変形で $n \geqq 3$ の場合を示すのは難しいのでしょうか．

お答え： 想像するに，あなたが言っている「平均値の定理」はこの講義であつかっている平均値の定理とは違うもののようですね．相加・相乗平均の関係式ではないですか？ $n=3$ のときは単なる式変形で証明できますよね．一般の n に対しては，与えられた正の数 $x_1,\ldots,x_{n-1}$ に対して，関数 $f(x)=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_{n-1}+x)-\sqrt[n]{x_1\ldots x_{n-1}x}$ の増減を調べればよい．

質問 61： 区間の両端と区間内のある一点の存在についての 2 つの定理，平均値の定理と中間値の定理は感覚的に似ている気がするのですが，包含関係が簡単に示せたりするのでしょうか．$a<c<b$，$f'(c)=0$ を満たす (a,b) で狭義単調な関数の逆関数 $f^{-1}(x)$ はいつでも $x=f(c)$ で微分不可能になっているのでしょうか．

お答え： 前半：微妙な言いかたですが「直接は関係ない」と思ってください．平均値の定理の対象は微分可能な関数，中間値の定理の対象は連続関数なので，まず相手が違います．後半：はい．f の逆関数 $g=f^{-1}$ が $f(c)$ で微分可能としましょう．このとき，$g\circ f(x)=x$ が成り立つので，合成関数の微分公式を用いて両辺の $x=c$ における微分係数を求めると，$g'(f(c))f'(c)=1$ が成り立つことがわかります．$f'(c)=0$ なので，この式はなりたたず，微分可能としたことが誤りとなります．

質問 62： テイラーの定理の $n=0$ の場合は平均値の定理を表し，これは「テイラーの定理を仮定すると平均値の定理が示される」ことを表していると思います．又，テイラーの定理の証明に平均値の定理を用いることは「平均値の定理を仮定するとテイラーの定理が示される」ことを表すと思います．これら 2 つの定理は同じ深さのことを言っ

ていると考えてよいでしょうか.

お答え： よいと思います.

質問 63： 2 変数関数を 2 つの変数で 1 回ずつ微分する場合，C^2-級だと微分の順番を入れ替えてもいい理由，C^2-級でない場合は入れ替えてはいけない理由は何ですか.

お答え： 入れ替えていい理由：そのことが証明されているから（証明には平均値の定理を用いる）．入れ替えてはいけない理由：入れ替えられない例があるから.

質問 64： $\sqrt{10}$ が 3 くらいだと認識することがなぜ重要でどれくらい重要なのでしょうか?

お答え： $\sqrt{10}$ の近似値をきかれたときに「考えこむ」よりまず「3 より少し大きい」といえる，ということは重要．応用の立場からすると，まず答えの概算をしてから計算するのが自然です.

質問 65： フェルマーの最終定理は，楕円曲線で証明されたように，数学のいろいろな分野の間にはつながりがあると思いますが，微分積分学と一見関係はないが実際深いかかわりがあるのは何だと思いますか.

お答え： たいていのものは関わっていると思います.「これは関係ないですか？」と聞いて頂けると考える気がおきます.

質問 66： 今回の授業の内容とはそれるかも知れませんが，重積分に関して質問します．$D : x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ という領域での重積分を，極座標変換 $\varPhi\colon E \to D$，$E =$ 略... で解こうと思ったのですが，$r = 0$（ヤコビアン 0）の点の集合が $\{(0, \theta, \varphi) \,|\, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$ でこれは面積を持つと思うので，この変換はまずいのかと思ったのですが，この変換でよいというのはどう説明されるのでしょう.

お答え： ご質問は三重積分ですね．ご質問の集合は面積をもちますが，体積は 0．三重積分は微小体積の（重み付き）和ですから，体積が 0 なら積分に影響しません.

質問 67： 教科書やその範囲の指定があるが，配布資料にはなくて教科書に載っているものがある場合，それは自分で勉強しておかなければならないのか.

お答え： 前回少し口走りましたが，教科書を指定するのは「正しい定理・公式が書いてある紙が必要」だから．講義ノートを基準とします.

質問 68： おもしろい約分の例を教えて下さい.

お答え： さがしてみよう.

質問 69： とくにないです/特にないです.　**お答え：**そうですか.