講義資料

今回の配布物は

- **講義資料 6 （2 枚）**
- **講義ノート IV （3 枚，12 月 25 日，1 月 5 日の講義内容）**

講義資料 6 修正：

- 3 ページ，質問 14，2 行目：$(z - z_1)^2 - (\omega - \omega_1)^2 \Rightarrow (z - z_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2$

微分積分学第二 (6)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/calc-2/

2017.12.22

ご意見

ご意見： 具体例が多いのでイメージしやすいです．

コメント： 例示は理解の試金石（結城浩）．
例をつくりながら論理を追うと分かりやすい．

ご意見： よく数学書をよむときに，変態な例とか具体例を学ぶようにいわれます．こういった例は自分で考えるものですか．（到底思いつきそうにない）．

コメント： 山田も思いつかないことが多いです．
仕組みが分かってしまうと無理に憶えなくても既知の例の再構成はできるようになるかも知れません．

ご意見： You are very Kinotiwarui.
(匿名の投稿，原文ママ：Kiotiwarui か?；ドラえもんらしき絵が大きく描いてありました．)

コメント： So what?

質問から

Q20: **結局** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 = 0$ **のときの極値判定をどうすれば良いのか分からなかった．**

A: **そうですか．今回すこしコメントしますが「個別に考える」．**

質問から

Q17: 一変数の場合のテーラーの定理は分かるのであるが，多変数になるとやはり分からなくなってしまう．テーラーの定理をより深く授業をしてほしい．

A: テイラーの定理（講義ノートの定理?）のどの辺がわからないのでしょう．どの程度まで深くすればよいのでしょう．リクエストが全く読み取れません．

Q12: 二変数の場合は“〜なる θ が存在する”という表現のテイラーの定理はないのでしょうか．

A: 教科書（三宅本）定理 4.3.2，講義ノートの定理 3.8 の証明をよく見ると，ご質問の形の定理が成り立つことがわかる．

Q9: 2 変数関数のテイラーの定理の一般形の第 n 項は $\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a,b)h^{n-i}k^i$ になるのでしょうか．講義資料に乗せていないのは，微積第二の講義においては使うことがないからでしょうか．

A: はい（n 次の項ですね）．ここではあまり使わないことにします．

質問から

Q10: **なぜテーラーの定理（2 変数）では x と y を使わずに h と k で表現するのですか．x, y で表現すると何かデメリットがあるのでしょうか（個人的には x, y の方が変数としてなじみがあるのでとても違和感を感じます）．**

A: **f の点 (x, y) における値を点 (a, b) における値から求めよう，という状況とお考えください．このとき，考える点を (x, y) と書くのに何も違和感がないですね．そこで $h = x - a$, $k = y - b$ とおいたのが講義ノートのテイラーの定理の形です．**

Q11: 2 **変数関数のテイラーの定理で剰余項が $R_3(h, k) = o(h^2 + k^2)$，$R_2(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$（$(h, k) \to (0, 0)$）とありましたが，一般に $R_{n+1}(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2}^n)$ （$(h, k) \to (0, 0)$）となりますか．また，その場合なぜ平方根をとるのか気になります．**

A: **はい．$\sqrt{h^2 + k^2}$ は $(x, y) = (a + h, b + k)$ と (a, b) の距離です．**

質問から

Q1: **定理 3.5 で微分係数を用いた極値判定の必要十分条件はないとおっしゃっていましたが，それは大学 1 年では理解できないような話を持ちだしても必要十分条件は存在しないのでしょうか．**

A: **次の関数はいずれも 0 ですべての階数の微分係数が 0：**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ e^{1/x} & (x < 0), \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -e^{1/x} & (x < 0), \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -e^{1/x} & (x < 0), \end{cases}$$

質問から

Q2: C^ω-級ならば一変数で極値を判定する必要十分条件があるのでしょうか.

定理： a を含む開区間で定義された定数でない C^ω-級関数 f に対して

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, \qquad f^{(n+1)}(a) \neq 0 \quad (*)$$

を満たす負でない整数 n が存在する.

定理： a を含む開区間で定義された定数でない C^ω-級 f に対して $(*)$ をみたす n をとると,

- $n+1$ が偶数のとき f は a で極値をとる.
- $n+1$ が奇数のとき f は a で極値をとらない.

質問から

Q3: **授業の途中，$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ なら極大値をとる，という証明で，テイラー展開で $o(h^2)$ を無視していいのかが疑問に思った．$\frac{f''(a)}{2!}h^2$ と $o(h^2)$ の大小関係とか分からないと思うのですが，どうでしょうか．**

A: **それがある程度分かるのが「ちょっと正確バージョン」の鍵．これから説明します．**

質問から

Q15: : 3 変数以上の関数での極値は存在するか. する場合, 導出する方法はあるか?

Q23: 三変数以上の極値について固有値との関わり合いがよくわからなかったです.

A: そうですか.

Q13: 講義資料の p33 の下から 5 行目の "係数を按分する" とはどういうことですか.

A: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_i x_j$ とかけているとき,

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\tilde{a}_{ij} + \tilde{a}_{ji}}{2} x_i x_j$$

となるので(ゆっくり考えるとわかる)$a_{ij} = (\tilde{a}_{ij} + \tilde{a}_{ji})/2$ とおきなおすと下から 4 行目の式が出る.