2017 年 12 月 22 日 (2017 年 12 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二講義資料 6

前回までの訂正

- 12 月 15 日配布プリントが「講議資料３」でないか，というご指摘がありましたが，「講義資料３」は 12 月 11 日の講義資料（配布しなかったが web ページに掲載されている）です．ちなみに「講 議 資料」は存在しません．
- 2 次式の平方完成で黒板に書き間違いがあったそうです．正しくは

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}y^2 = A\left\{\left(x + \frac{B}{A}y^2\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}y^2\right\}$$

- 黒板に書いた「定理's 3.11–3.12」のアポストロフィは不要（所有格でないので）というコメントがありましたが，記号や数字を名詞扱いして複数形にするときはしばしばアポストロフィをつけます．ここでは「定理」を（英単語ではないので）記号とみなしてこの用法にしたがっています．
- 講義資料 4, 2 ページ，質問 9 の回答の 2 行目：しています．す．の「す.」を削除.
- 講義資料 4, 4 ページ，質問 24 の回答：質問??のように ⇒ 質問 22 のように
- 講義資料 4, 4 ページ，質問 42 の 2 行目：発送 ⇒ 発想
- 講義ノート 35 ページ，問題 III-3 (1)：文末にピリオド追加.

授業に関する御意見

- You are very Kinotiwarui. (匿名の投稿，原文ママ：Kiotiwarui か?；ドラえもんらしき絵が大きく描いてありました．)
  山田のコメント： So what?
- 駆け寄って来るの，なんか怖いです. . . いつか転びますよ.
  山田のコメント： よく転びます．10 月には駅前で転んで剥離骨折.
- $i > 0 \Rightarrow -1 > 0$, $i < 0 \Rightarrow -1 > 0$ の話が面白かったです.
  山田のコメント： したがって複素数には「うまい大小関係」を定義できない，という結論は大丈夫ですよね.
- 極値の定義が再確認できて良かった．ε-δ 論法に近い説明になってきて面白い.
  山田のコメント： そういう意図でここに極値問題をいれています．極限の理論へのウォーミング・アップですね.
- $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ の最大最小からスタートして 2 変数関数の極値を扱って頂けたため，理解し易かった.
  山田のコメント： なるほど.
- 例を示してもらえるのでありがたい.
- 定理の紹介を定理の主張と証明だけでなく具体的な意味や例をふくめてしていて良いと思う.
- 具体例が多いのでイメージしやすいです.
  山田のコメント： 例示は理解の試金石（結城浩氏の言葉であったと思います)．ご自分で勉強する場合，例をつくりながら論理を追うと分かりやすいことがあります.
- よく数学書をよむときに，変態な例とか具体例を学ぶようにいわれます．こういった例は自分で考えるものですか（到底思いつきそうにない).
  山田のコメント： 山田も思いつかないことが多いです．仕組みが分かってしまうと無理に憶えなくても既知の例の再構成はできるようになるかも知れません.
- 変な関数って色々あるもんだなと思いました．　**山田のコメント：** ほんとにそうですね.
- 線形代数を先にやるカリキュラムで幸運だったなあと思いました．　**山田のコメント：** どちらでもやりようなんですけどね.
- 特にないです．/I have nothing to say.　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 定理 3.5 で微分係数を用いた極値判定の必要十分条件はないとおっしゃっていましたが，それは大学 1 年では理解できないような話を持ちだしても必要十分条件は存在しないのでしょうか.

お答え： 考えている点での微分係数の値だけを用いた必要十分条件はありません．このことは「点 $x = a$ で任意の階数の微分係数が一致しているにもかかわらず，極値の状況がことなる二つ以上の関数」を構成すれば証明されたことになります．実際,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ e^{1/x} & (x < 0), \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -e^{1/x} & (x < 0), \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -e^{1/x} & (x < 0), \end{cases}$$

とおくと，任意の n に対して $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = h^{(n)}(0) = 0$ となりますが，f は 0 で極小値を，g は 0 で極大値をとり，h は 0 で極値をとりません.

質問 2： C^{ω}-級ならば一変数で極値を判定する必要十分条件があるのでしょうか.

お答え： はい，すでにヒントは講義で出しているはず．関数 f が a で C^{ω}-級で a を含む開区間で一定でないならば，f の a における n 階微分係数 $f^{(n)}(a)$ （$n \geqq 1$）のうちどれかは零でない．そのような n のうち最小のものをとり，その偶奇を調べればよい.

質問 3： 授業の途中，$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ なら極大値をとる，という証明で，テイラー展開で $o(h^2)$ を無視していいのかが疑問に思った．$\frac{f''(a)}{2!}h^2$ と $o(h^2)$ の大小関係とか分からないと思うのですが，どうでしょうか.

お答え： それがある程度わかるのが $o(h^2)$ という記号．今回説明します.

質問 4： 講義資料の定理の証明 (?) にいい加減 ver がありますが，単に証明のイメージを持ってもらうために載っているだけで，証明問題で使ったら説明不足にされますか?

お答え： まず，この定理の証明を試験に出すことはありません．その上で (1) 細かいことを言う以前に「いい加減バージョン」のような見当をつけることができる，というセンスは重要．(2) これを証明としても（必要ならばどこがいい加減かを説明できて，その穴を埋めることができるならば）可だと思います.

質問 5： 多変数関数 $f(x, y)$（原文ママ：2 変数関数か?）が点 (a, b) で極値をとるならば $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ である，という定理に関する質問です．f が C^{∞}-級ならば成り立つのは分かりますが，f が (a, b) で偏微分不可能であるときはその点で極値を取らないのでしょうか.

お答え： 講義ノートの定理 3.11 は C^{∞}-級と仮定していますね．この定理では「偏微分不可能の時」については何も言及していません．すなわちこの定理を読んで「偏微分不可能であるときはその点で 極値を取らない」と結論づけることはできません（妄想にすぎません)．実際 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ は $(0, 0)$ で極小値をとります.

質問 6： 2 変数関数の極値判定定理について．$AC - B^2 = 0$ のときの判定は演習では極値の定義に従って行うと教わり，実際の判定はできるようになった．一方講義の板書では，高次の微分を見ないとわからないとしていた．そこで 2 次の項では判定できないが 3 次以降の項でなら判定できる例やその具体的な手法を知りたい.

お答え： 例を挙げますが，一般に 3 次式，4 次式の符号はそれほど容易にはわからないです．個別に判定するのがよい.

質問 7： $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ となる点は図形的にどのような意味をもつのか知りたいです.

お答え： さまざまな状況があります．$x^4 \pm y^4$，$x^3 \pm y^2$ などの原点付近での様子をしらべてごらんなさい.

質問 8： x, y の 2 変数関数について，極限を調べる際に極座標へ変換して角方向（θ が示す）からある点への近づき方を見ましたが，これは極値の判定でも有効でしょうか？（極座標変換した後偏導関数等を調べるということ)．また，通常は f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} といったものが極値判定に関わってきますが，極座標変換した後 f の θ や r についての変導関数（原文ママ：偏導関数）はどのような意味をもってくるのでしょうか?

お答え： まず，同次 2 次式 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ の原点付近での様子を極座標を用いて調べられるかどうかためそう.

質問 9： 2 変数関数のテイラーの定理の一般形の第 n 項は $\frac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a, b)h^{n-i}k^i$ になるのでしょうか．講義資料に乗せていないのは，微積第二の講義においては使うことがないからでしょうか.

お答え： はい（n 次の項ですね)．ここではあまり使わないことにします.

質問 10： なぜテーラーの定理（2 変数）では x と y を使わずに h と k で表現するのですか．x, y で表現すると何かデメリットがあるのでしょうか（個人的には x, y の方が変数としてなじみがあるのでとても違和感を感じます).

お答え： f の点 (x,y) における値を点 (a,b) における値から求めよう，という状況とお考えください．このとき，考える点を (x,y) と書くのに何も違和感がないですね．そこで $h=x-a$, $k=y-b$ とおいたのが講義ノートのテイラーの定理の形です．

質問 11： 2 変数関数のテイラーの定理で剰余項が $R_3(h,k)=o(h^2+k^2)$，$R_2(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$（$(h,k)\to(0,0)$）とありましたが，一般に $R_{n+1}(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2}^n)$ （$(h,k)\to(0,0)$）となりますか．また，その場合なぜ平方根をとるのか気になります．

お答え： はい．$\sqrt{h^2+k^2}$ は $(x,y)=(a+h,b+k)$ と (a,b) の距離です．

質問 12： 二変数の場合は "〜なる θ が存在する" という表現のテイラーの定理はないのでしょうか．

お答え： 教科書（三宅本）定理 4.3.2，講義ノートの定理 3.8 の証明をよく見ると，ご質問の形の定理が成り立つことがわかる．

質問 13： 講義資料の p33 の下から 5 行目の "係数を按分する" とはどういうことですか．

お答え： $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_ix_j$ とかけているとき，

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^n \frac{\tilde{a}_{ij}+\tilde{a}_{ji}}{2}x_ix_j$$

となるので（ゆっくり考えるとわかる）$a_{ij}=(\tilde{a}_{ij}+\tilde{a}_{ji})/2$ とおきなおすと下から 4 行目の式が出る．

質問 14： 今日習った極値の定理（原文ママ：定義では？）は，すべての次元で共通ですか? 例えば 4 次元だと近傍を $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+(\omega-\omega_1)^2<\varepsilon^2$ （原文ママ：ω (omega) ではなく w を使うのが自然では?）として考える定義になっているのでしょうか．　**お答え：**はい．

質問 15： 3 変数以上の関数での極値は存在するか．する場合，導出する方法はあるか？（原文ママ：極値を導出する？）

お答え： 講義ノート 32 ページ以降．

質問 16： 講義資料 p 33 の事実 (3.14) のところで，φ は表現行列ですが，何か求めるメリットはありますか?

お答え： 事実 3.14（括弧なし）ですね．φ は表現行列でありません．表現行列は，(a_{ij})．求めるメリットは線形代数学第二で学んだはず．

質問 17： 前回の演習で思ったことなのですが，テーラーの定理で n 次の項まで展開すれば極限を求められる問題はロピタルの定理を n 回繰り返せば解けると考えてもいいのでしょうか．　**お答え：**はい．

質問 18： あまり関係ないですが，ε が出てきたので気になりました．ε-δ 論法で δ を主に使うのってどういう時なのでしょうか．

お答え： それは来週．

質問 19： 前期の微分積分学の先生は $D_\varepsilon(x)=\{y\in \boldsymbol{R}^n \,|\, |x-y|<\varepsilon\}$ を $\boldsymbol{R}^n$ における x を中心とする半径 ε の開球とよび，$^\exists\varepsilon>0$ s.t. $D_\varepsilon(x)\subset D$ をみたす $D\subset\boldsymbol{R}^n$ を x の近傍と定義していましたが，講義ノートや教科書では $D_\varepsilon(x)$ が近傍とされています．なぜこのような流儀の違いが存在するのでしょうか．

お答え： 講義ノートでは $U_\varepsilon(a,b)$ を (a,b) の ε-近傍 といっています．近傍とは言っていません．「近傍」は前期に習った意味と思って下さい．実は「近傍」を「ε-近傍」に置き換えてもまったく同値な議論ができるので，あまりこだわらなくてもよいのですが．

質問 20： $f(x,y):C^\infty$ において $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ のとき，$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ とおくと $AC-B^2>0$ ならば f は (a,b) で極値をとることが，なぜ $f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+R$ であることから分かるのかよく分かりませんでした．

お答え： そうですか．講義ノート 32 ページの「定理 3.12 の証明（いい加減バージョン）」のどの辺がわかりませんか?

質問 21： 一変数の場合のテーラーの定理は分かるのであるが，多変数になるとやはり分からなくなってしまう．テーラーの定理をより深く授業をしてほしい．

お答え： テイラーの定理（講義ノートの定理?）のどの辺がわからないのでしょう．どの程度まで深くすればよいのでしょう．リクエストが全く読み取れません．

質問 22： 結局 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2=0$ のときの極値判定をどうすれば良いのか分からなかった．

お答え： そうですか．今回すこしコメントしますが「個別に考える」．

質問 23： 三変数以上の極値について固有値との関わり合いがよくわからなかったです．

お答え： そうですか．

質問 24： 前回の質問 10 に対する「お答え」に「『ガンマ関数』(前期に学んだと思います)」とあるのですが，学んでいないと思います．　**お答え：**なるほど．それでは今学んで下さい．教科書（三宅本）70 ページです．

質問 25： ランダウのラージ O は「当面」使わないということだったのですが，ではいつ使うのでしょうか.

お答え： この講義では使いません．一生使わない人もいるでしょうし，他の場面で来週使うひともいるでしょう.

質問 26： 二次やもっと高次の数式についてもランダウの記号を定義することはあるのでしょうか.

お答え： 実際 $o(h^n)$ は n 次の数式についてのランダウの記号だと思いますが，ひょっとして違うことを聞いている?

質問 27： $x^2 - y^2 = -1$ について（右図），点 $(0, \pm 1)$ はそれぞれ極値なのでしょうか．直観的には極値に思えますが，「$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$」のような定義にはあてはまっていないように見えます.

お答え： あてはめてみましたか? そのとき $f(x)$ はどういう関数にしましたか（ご質問のどこにも書いてありません）. $x^2 - y^2 = -1$ という関係式は，関数を定めていません.

質問 28： 「$f_{xx} > 0$，$f_{yy} > 0$，かつ $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が極値をもつ」がわかっているとき，$x = \mathrm{const}$，$y = \mathrm{const}$ で切った平面をみることで直観的に f が極小値をもつということが何となく分かります．このように図形的に何とな〜く極値判定：$AC - B^2$ を解釈する方法ってありますか?

お答え： どのようにかよくわかりませんが，最初の文は「極値をもつ」と仮定してしまっているので，何となくでも極値判定を解釈できていません．$f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ というだけでは極値をとるかどうかわかりません．切り口を考えてもわかりません．実際 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ に対して $f(x, 0) = x^2$，$f(0, y) = y^2$ でこれらは原点で極小ですが，f は原点で極値をとりません.

質問 29： 三変数以上のテイラーの定理のとき，なぜ行列式がでてくるのかよく分からない.

お答え： 行列式は出てきません．行列はでてきますが（行列式 determinant と行列 matrix の区別はついていますね）.

質問 30： 前期で $\left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ y\to 0 \end{smallmatrix}\right)$，$\left(\begin{smallmatrix} y=0 \\ x\to 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} y=mx \\ x\to 0 \end{smallmatrix}\right)$ の方法で $(0, 0)$ で極値判定をした記憶がありますが，それと今ならった $H = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ で判定する方法との間に何か関係があるのでしょうか.

お答え： 多分「前期で」とおっしゃっているのは「極限値」limit.「極値」（maxima/minima; extremal）とは違います.

質問 31： 授業ギリギリに入ってきてプリントだけもらって帰る人をどう思いますか? データはアップロードされているのであまり意味がないような気がするのですが. . .

お答え： とくに何も思いません．お好きなように．ただ，講義中に前の方に来た人は山田にいじられても文句を言わないように.

質問 32： 特にないです. **お答え：**そうですか.