2018 年 1 月 5 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二講義資料 8

お知らせ

- あけましておめでとうございます．あと一月と少しですが，お付き合い願います．
- 次回の演習は 1 月 10 日，講義は 1 月 15 日となります．
- 今回の配布資料は，講義資料 8（この紙），講義ノート V 節です．
- 最初の時間に連絡したとおり，2018 年 1 月 29 日に**中間試験**を行います．次回 1 月 15 日に**試験予告**を行いますので，皆様お誘い合わせの上，ご出席ください．

前回までの訂正

- 講義ノート 38 ページ，下から 5 行目：最後の等式では ⇒ (c) では（(c) が「等式」ではないというご指摘です）.
- 講義ノート 39 ページ，5 行目：$|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2\beta} \Rightarrow |a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$
- 講義ノート 40 ページ，11 行目：（加減）⇒（下限）
- 講義ノート 40 ページ，脚注：脚注 10) が 2 つあるので，後者を 11) に変更，以降の脚注番号がひとつずつ増える．
- 講義ノート 42 ページ，6 行目：$p_m > q_{n_j+1} - (1/j) \Rightarrow p_m > q_{n_j+1} - (1/j+1)$ （n_1 を決めるためにはこの式で $j = 0$ としなければならないので）.

授業に関する御意見

- 友人に山田光太郎に似てると言われました．悲しいです．（顔文字略）　**山田のコメント：** なんで悲しいの？
- Merry Christmas (絵省略)　**山田のコメント：** ノーコメント
- クリスマスなのでようかんではなく，ケーキが良いと思います．
  山田のコメント： 日本国憲法第 20 条 3 項：国及びその機関は、宗教教育その他いかなる宗教的活動もしてはならない.
- ε-δ を用いた証明問題の例をもっと扱ってほしい．　**山田のコメント：** 今回すこし．10 日の演習でももう少し扱うはず．
- 講義資料の問題の解答例を探しましたが見つかりません．助けてください．
  山田のコメント： 講義 web ページのリンクはすべて辿ってみましたか？（危ないリンクはありません．ご安心ください.）
- 公理と同値な命題は本当に同じことを言っているのかとおもうくらい飛躍していて，証明の途中が気になります．
  山田のコメント： 講義ノートに証明があります．多少ぶっきらぼうに書いてあるのは「興味があったらみてください」というメッセージ．これが理解できなければ先に進めない，というものではない．
- 全部自然言語訳で書こうとすると逆に分かり辛く感じます．特に否定命題を考えるときは，述語論理の言葉使いの方が絶対分かりやすいと思います．　**山田のコメント：** 人によると思います．「述語論理」的な言葉づかいをしているにもかかわらず理解が浅くて「間違えた」場合，その間違いに気が付かない可能性が非常に高いです．
- 「論理学チックなことにハマると計算ができなくなるので注意」とのことですが，これらの命題を考えることも non-trivial と思います．数学におけるこれらの価値判断基準はありますか？今現在，私は論理学の方に楽しみを見出してしまうのですが．
  山田のコメント： 人それぞれ．それを使って何をするか，何を理解するか（数学を専門とする場合はとくに後者?）が重要．
- 内容は難しいですが，例えば分かりやすいので少しは理解できます．
  山田のコメント： 「喩え話」に頼り過ぎると的確な理解ができなくなるので注意．
- ヨウカンに関する考察が興味深かったです．　**山田のコメント：** どうも
- (山田注：質問について) 長いので TEX でうちこまなくて大丈夫です．金曜日に出席できたら直接ききにいきます．
  山田のコメント： 質問と回答はあなたのためだけのものではなく，クラス全員と共有すべきもの．ちなみに全然長くない．
- とてもおもしろかったです　**山田のコメント：** ですか．
- 頑張ります　**山田のコメント：** そう．
- 特になし/特にないです．　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 前期「$A \Rightarrow B$」は「$\neg A \vee B$」と同値であると学びましたが，今回の講義で，これを「A をみたすような任意の状況において B」と読みかえていたように思います．これは論理的に同値な関係にあるのでしょうか．また，論理的にどのように解釈すればよいのでしょうか．

お答え： 「命題論理」では「$A \to B$」すなわち “A implies B” はご質問のように定義されます．一方，ε-δ の文脈では「全ての x に対して $A(x)$」($\forall x A(x)$)「$A(x)$ を満たす x が存在する」($\exists x A(x)$) など “変数” を含む $A(x)$ を縛る $\forall, \exists$（量化子 quantifier という）が含まれます．このような文脈（一階の述語論理）では “$A(x)$ ならば $B(x)$” を「全ての x に対して $A(x) \Rightarrow B(x)$」の意味で用いることが多いように思います．すなわち “$\forall x \neg A(x) \vee B(x)$”．このことをご質問のように（日常語のレベルで）読み替えています．

質問 2： 授業中では，数列が収束しないことを「次をみたす正の数 ε が存在する．任意の番号 N に対して $n \geqq N$ を満たし $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる n が存在する」としていました．これは収束の定義を「$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $\forall n, n \geqq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$」としているのでしょうか（質問 1）．というのも，私は収束の定義を「$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $n \geqq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$」と覚えていたからです．あとどちらの定義もほぼ一緒で，個人の好みの問題ですよね（質問 2） **お答え：**質問 1：はい．質問 2: はい． $\forall n$ を入れたのは質問 1 のような状況を明示したかったから．

質問 3： 命題を否定するときに $\sim = \sim$ が入っている時，$\sim \neq \sim$ にしていいのかよく分からない．

お答え： いいのです．「$a \neq b$」とは「$a = b$ でない」のこと，と定義します．

質問 4： $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \Rightarrow \neg B$ は自明ですか? $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg((\neg A) \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$ とするとわからないのですが． **お答え：**正しくない．A が偽なら $\neg(A \Rightarrow B)$ は偽．一方，$A \Rightarrow \neg B$ は真．

質問 5： 「関数 f ($: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$) が $x \to a$ で α に収束しない $\Leftrightarrow \exists (a_n)$ s.t. $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ は α に収束しない」ですが,「数列 a_n が $n \to \infty$ で α に収束しない $\Leftrightarrow \exists (x_n)$ s.t. $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, $\lim_{n\to\infty} a_{x_n}$ は α に収束しない」と言えますか? 数列を関数とみなしてやれば成り立ちそうですが.

お答え： はい，成り立ちます（注：「$\lim_{n\to\infty} a_{x_n}$ は α に収束しない」は「$\{a_{x_n}\}$ は α に収束しない」と言った方が自然だと思います)[*1]．ご質問の命題のうち “$\Rightarrow$” は $x_n = n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とすることですぐにわかります．また “$\Leftarrow$” は，対偶をとって「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $+\infty$ に発散する任意の自然数の列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_{x_n} = \alpha$」を示せばよいが，これは極限の定義から容易に示せる．

質問 6： ある四則演算と不等式の全順序関係が成り立つ数の集合 X が存在したとして『任意の $S \subset X$ で「$M_1 \in X$ で，任意の $x \in S$ について $x \leqq M_1$ なる M_1 が存在する」$\Rightarrow$「ある $M_2 \in X$ が存在し，すべての εX かつ $\varepsilon > 0$ で，ある $x \in S$ が存在し，$x > M_2 - \varepsilon$ かつ $x \leqq M_2$」』が成立するとき，X を実数と定め R と書くのでしょうか? つまり**実数の公理とは実数の定義なのでしょうか**? そうでなければ循環論法におちいっている気がします．もし実数の公理が実数の定義だとしたら，この定義をみたす数集合は一つのみなのでしょうか?

お答え： 前半：そうです．加減乗除と順序関係が整合的に定義されている集合（順序体という．整合的の意味は「よく知っている性質が成り立つ」こと）がさらに連続性の公理を満たすとき，それを**実数体**あるいは**実数全体の集合**とよんで $\boldsymbol{R}$ と書きます．後半：「数集合」とは何か？「唯一」とは何か？という問が自然にでてきますね．「数集合」という言葉は数学の文脈では使いません．「数の集合」という言葉で実数（または複素数）全体の集合の部分集合を意味することがありますが，この文脈ではそれこそ循環論法ですね．何を同一視するかで唯一かどうかがきまりますが，ここではそこには深入りせず「実数の公理から導かれる性質のみを実数の性質とみなす」ことにします．

質問 7： 実数とな何か? という議論に関して講義を聞いていると，実数の定義が「連続性の公理を満たすような集合」であるように聞こえたが（「実数はそういうものと考える」などの表現から），これは正しいのかどうかを教えてほしい．また正しくないのであれば，実数の定義を教えてほしい． **お答え：**正しいです．

質問 8： 結局，実数の定義は何なのでしょうか? 公理は分かりましたが.... 収束すると「=」なのでしょうか?

お答え： 前半：質問 6 の回答．公理系を満たす集合を実数全体の集合という．後半：何を言っているかわかりません．

質問 9： $\boldsymbol{N}$ や $\boldsymbol{Q}$ も公理で議論するのでしょうか？また，なぜ（少なくとも）実数は「$r \in \boldsymbol{R}$ ${}_{def \Leftrightarrow P(r)}$」（$P(r)$ は論理式）という形で表さないのでしょうか．ゼロ除算はこのあたりの議論に関係しますか.

[*1] この講義では数列を表すのに，ご質問のような括弧 ( ) ではなく中括弧 { } を用いています．数列の場合は項の並ぶ順番に意味があるので，集合の記号と類似の記号を使うのはよくないかもしれません．

お答え： ゼロ除算について：加減乗除が小学校で習ったような演算法則をみたすようにうまく定義できるためには 0 で割ることを禁止しなければなりません．これは実数の公理とは無関係で，有理数を定義した段階で禁止されます．一般に「体 field; der Körper」とよばれる代数系の性質です．$\boldsymbol{N}$（自然数全体の集合）の公理的定義は「ペアノの公理系」で検索．整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$，有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{N}$ から構成的に得られます．実数全体の集合は，たとえば「有理数体の切断全体の集合をある同値関係で割ったもの」という構成ができます．ここでは「簡単のために」そのような立場をとらないことにしています．すなわち，公理的に扱ったほうが簡単．

質問 10： 「上に有界な単調非減少数列は収束」という定理が連続性の公理のかわりであるということはどういうことですか． **お答え：**連続性の公理（と実数の体としての性質）からご質問の「〜」が証明できる．また，実数の性質から連続性の公理を除いたような体系で「〜」を仮定すると，連続性の公理の主張が証明できる．

質問 11： 高校までの実数の定義のことをしっかり覚えてこなかったが，大学に入って「示せ」と言われる問題をやっているうちに実数のことに疑問を抱いていて，定義の仕方によってかわることはそれはそうだなと思った．となると国弱の人は出来なそうだと思った． **お答え：**何を言っているか分かりません．「定義の仕方によって変わる」とは何が変わるのでしょうか．それが書いてありませんので「それはそうだな」といわれても困ります．同様に「出来なそう」は何ができないのかがわかりません．

質問 12： 「上に有界 $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in A$ に対して $x \leqq M$ となる M が存在する」に関しての確認であるが，$M \in A$ ではないのか． **お答え：**違います．$A = (0, 1)$（開区間）は上に有界ですが，A の要素 M で「任意の $x \in A$ に対して $x \leqq M$」となるものは存在しません．

質問 13： δ を「ケチ」と例えた極限の定義の解説は分かりやすかったのですが，なぜ高校までとは違い ε-δ を用いて資料にあるような定義をするのでしょうか? 高校までの方法では何か問題が生じるのかわからないと急にこれからはこれが定義だと言われても納得しにくかったです．

お答え： たとえば第 V 週，第 VI 週で挙げる幾つかの性質は，素朴な極限の解釈では証明できません．とはいえ，ニュートン・ライプニッツからコーシーに至るまで，素朴な極限の考え方で微積分が構築できたわけで，ε-δ をもちいない「何となく極限」でもある程度のことはできます．というわけで「必要となったときにこんな定義があったな」と思い出すのがよいと思います．納得しなくても構いません．

質問 14： ε-δ 式について x が a から無限に離れないようにというためだけに δ が設定されていると解釈していますが，δ の値が有限であればどれだけ大きくなっても大丈夫なのでしょうか（ε にうちてのそういう疑問があります）．

お答え： 定数関数 $f(x) = 0$ は a で連続．実際，任意の正の数 ε に対して，$\delta = 100$ とすると $|x| < 100$ ならば $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$．これは極端な例で，$\delta$ は ε に応じてとれて，ε が小さくなれば小さくなるのが普通．δ は「設定」されるのではないので，ご質問の解釈は誤りです．もしも ε が大きいならば，あまり努力しなくても最後の不等式が成り立ちやすいので，本当は「小さい ε」にのみ興味がある．しかし「大きい」「小さい」は相対的なもので定義に組み入れにくいので「任意の」という語で「どんなに小さくても」という意味をもたせています．

質問 15： $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow$ 任意の正の数 ε に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$（$|x - a| < \delta$）を満たす δ が存在（原文ママ：$|x - a| < \delta$ ではなく $0 < |x - a| < \delta$．なぜ “$0 <$” が必要かは講義で説明しましたね）と授業では定義しましたが，正直この定義よりも高校の数学のでの定義 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to +a} f(x) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to -a} f(x) = \alpha$ の方が分かりやすく感じます．ε-δ を用いて定義するのはこちらの方が一般生が高いからですか．

お答え： あなたの「高校での定義」は，正しくありません．本当に高校でこれを「定義」として習いましたか? (1) たとえば $f(x) = x$ とすると，$\displaystyle\lim_{x\to+1} f(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = -1$ ですが $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ は存在しないのでしょうか．（あなたが言おうとしていることは想像できますが，書いてあることをそのまま解釈するとこのようになります．）(2) それでは $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ はどのように定義しますか? あなたが主張する「高校式の定義」を完結させるためには，この極限（右極限）が定義されていなければなりませんが，それはどのように習いましたか．

質問 16： $f(x) = [x]$ が $x = 0$ で連続でないことはどうやって示せますか．

お答え： $[x]$ はガウスの記号（すなわち x を越えない最大の整数）ですか? そうなら $f(0) = 0$．一方 $a_n = -1/n$ とおくと $a_n \to 0$ かつ $f(a_n) = -1$ なので，定理 4.21（注意 4.22）から $x \to 0$ のとき $f(x)$ は $f(0)$ に収束しない．

質問 17： 定理 4.2（原文ママ：定理 4.21 のことか）の否定の具体例で $f(x) = \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ 以外のものはないのか． **お答え：**たとえば，講義ノート 2 ページの例 1.3 の f の導関数（3 ページ）はご質問のもの以外の例です．質問 16 の例はどうでしょう．

質問 18： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示すときに $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n$ を出して考えるという発想はどやって出てくるのですか? 説明があったのに聞き逃しただけだったらすみません．

お答え： 適切な本を調べれば載っているのかもしれませんが，調べるのが面倒くさいので，ちょっと考えてみました．1 に上から近付く数列 a_n で $a_n \geqq \sqrt[n]{n}$ となるものを見つければよい．すなわち $(a_n)^n \geqq n$ となる a_n をみつける．$a_n = 1 + b_n$ とおいて二項展開してうまくいく b_n を，10 個くらい色々な方法を試して，みつける．

質問 19： $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を証明するときに二項定理を使われていましたが，二項定理でなく対数をとった解法を用いたのは（山田注：用いていませんが）先生の趣味ですか? それとも厳密な証明のときは対数を取るのは好ましくないから使わなかったのでしょうか? **お答え：**対数をとってもよいが，なるべく初等的な証明を与えたかったので．

質問 20： 定理 4.12 が無い世界の場合，$0.999\ldots$ は 1 とは言えないのでしょうか．

お答え： 定理 4.12 は「任意の無限小数が実数を表す」ということですね．$0.999\ldots$ という特別な無限小数の場合は（有理数しか知らなくても）有限小数からなる数列が 1 に収束することがわかるので，定理 4.12 は不要です．

質問 21： $0.999\cdots = 1$ について，$U|x\{0 < x < 1\}$（原文ママ：意味不明）とすると $1 \notin U$ は分かるのですが，$0.99\cdots \in U$ である気がするのですが，気のせいですか． **お答え：**ご質問の U ですが，$U = \{x \,|\, 0 < x < 1\}$ でしょうか．不勉強にして，ご質問ような集合の記法を知らないのですが，どの教科書・文献の記法でしょうか．こう解釈したとき，回答は「気のせい」．なぜ「$0.99\cdots \in U$ である気がする」のか，明確に述べてごらんなさい．

質問 22： 極限の結果が $=$ になることが納得できません． **お答え：**極限値の問題で等号を使ったことはないんですか?

質問 23： 「先生は偉い」の否定をする際に「偉い」の基準が人それぞれ異なってくるため証明は不可能であると感じたため，例として良くなかったと思う．そのため「教室にいる人は生徒である」という例をあげ，生徒以外の「先生，教授」が「存在」することを例に挙げるなど，生徒や教授の定義が定まっている例をあげて欲しかった．

お答え： 喩え話は，必要な性質を抽出して聞かないといけませんね．もちろんこの場合は「偉い」という属性が定義されているという仮定があります．羊羹の三等分も「二等分はできる」という非現実的な仮定の下での喩え話です．ところで，この授業の教室には「生徒」はいません．学校教育法 89 条をご覧ください（このように法律上の定義がきちんとある例だと，むしろいい加減なことが言い難いのでわざと避けています）．

質問 24： $0.999\cdots = 1$ になる説明を受けたが，$x = 0.999\ldots$，$10x = 9.99\ldots$ から $x = 1 = 0.99\ldots$ になる方法は問題ないのか気になった． **お答え：**多少問題．(1) $x = 0.999\ldots$ とおけるか．すなわち右辺が数かという考察が抜けている．「$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ とおくと $S = 1 - S$ なので $S = 1/2$」という誤った議論に似ている．$0.999\ldots$ の場合，収束が分かるのでこうおける．(2) $10x = 9.999\ldots$ の成り立つ理由を述べるべき．これは数列の極限の性質「$a_n \to \alpha$ なら $10a_n \to 10\alpha$ に収束する」ことによる．あたりまえだが，証明が必要な事実．

質問 25： $f : C^\omega$：実解析的（原文ママ：C^ω と実解析的は同じ意味だから，一方だけでよい），f が a の近くで定数でなければ，$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$ かつ $f^{n+1}(a) \neq 0$ となる n が存在する（中略）この n によって極値判定可能．$n + 1$ が偶数 $\Rightarrow$ 極値をとる，奇数 $\Rightarrow$ 極値をとらない．

この最後の部分の n による極値判定がどうして可能なのか解説をお願いします． **お答え：**12 月 15 日の講義でコメントした（実解析的という文脈ではなく，「$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$ かつ $f^{n+1}(a) \neq 0$ となるときは」）．定理 3.5 の B, C と全く同様にテイラーの定理の定数項のつぎに最初にでてくる項の符号をみればよい．

質問 26： 多変数関数の「微分可能」と「偏微分可能」の違いを教えて下さい．（山田先生 2015 年度微分積分学第一の講義ノート 30 ページ，定理 3.16：領域 D で定義された 2 変数関数 f が D の各点で偏微分可能かつ f_x，f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である，に関する質問です．） **お答え：**微分可能性の定義は，ご質問の講義ノートの 29 ページ，定義 3.11．偏微分可能性は 17 ページ．微分可能な関数は偏微分可能（命題 3.12）．偏微分可能かつ偏導関数が連続なら微分可能（定理 3.16）．偏微分可能で微分可能でない関数が存在する（例 3.8）．

質問 27： ラージ・オーとスモール・オーについてですが，どちらも似たようなものなのに，今までの問題でもどちらか一個あれば十分だと感じます．どのような歴史で 2 つも作られたのでしょうか．

お答え： 歴史はよく知りません．2 つあってもいいじゃないですか．

質問 28： 単調増加と単調非増加の違いってありますか． **お答え：**増加するのと増加しない（むしろ減る）の違い．

質問 29： 誤りはなかったと思います．ε-N，ε-δ の証明は教科書を読んでも不明でしたが，ようかんの話でなんとなく分かりました． **お答え：**「証明」というよりむしろ「定義」．なんとなく分かればよいと思うのです．

質問 30： ε-δ を用いた証明問題には，証明のパターンがあるのか．もしないとしたら，どのような方針で証明を考えて行けばいいのか． **お答え：**パターンは「仮定を用いて結論を示す」（当たり前）．数列の収束を示すときは「任意の正の数 ε に対して $N = \boxed{}$ とおけば，$|a_n - \alpha| = \boxed{} < \varepsilon$ となる」というのが唯一のパターン．この $\boxed{}$ の部分をどう扱うかは個々の問題．

質問 31： 特にないです．（3 件） **お答え：**me, too.