I. 平均値の定理とテイラーの定理

I.1　平均値の定理

■ **復習：連続性と微分可能性**　数直線上の区間 I で [1] 定義された（一変数）関数 f が [2] 点 $a\in I$ で**連続** [3] であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \tag{1.1}$$

が成り立つことである．とくに a が閉区間の左端（右端）のときは，(1.1) の左辺の極限は，**右極限** $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ （**左極限** $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$）とする [4][5]．さらに，区間 I の各点で連続な関数 f を**区間 I で連続な関数**，**I 上の連続関数**，**I 上で定義された連続関数**などという．

区間 I で定義された関数 f が I 上の点 a で**微分可能** [6] であるとは，次の極限値が存在することである：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

この値を f の a における**微分係数**といって $f'(a)$ で表す．区間 I の各点で微分可能な関数を **区間 I で微分可能である**という．次の定理が成り立つ [7]．

定理 1.1. 関数 f が a で微分可能なら，f は a で連続である．

証明． 二つの関数 F, G が $\displaystyle\lim_{x\to a}F(x)=\alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a}G(x)=\beta$ をみたすならば，

$$\lim_{x\to a}\bigl(F(x)\pm G(x)\bigr)=\alpha\pm\beta,\qquad \lim_{x\to a}\bigl(F(x)G(x)\bigr)=\alpha\beta$$

---

*) 2017 年 12 月 04 日/08 日 (2017 年 12 月 15 日訂正)

[1] 区間 an interval; 開 (閉) 区間 an open (a closed) interval.

[2] 関数 a function.

[3] 連続 continuous; 連続関数 a continuous function.

[4] 極限 limit; 右極限 right-hand limit; 左極限 left-hand limit.

[5] 極限の定義は第 IV 節で扱う．ここでは「どんどん近づく」という理解でよい．

[6] 微分可能 differentiable; 微分係数 the differential coefficient; 導関数 the derivative.

[7] 定理 a theorem; 系 a corollary; 命題 a proposition; 補題 a lemma; 証明 a proof.

が成り立つこと（極限の公式）を用いる [8]．実際，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr)&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right)\\&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)+f(a)\bigr)\\&=\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr)+\lim_{x\to a}f(a)=0+f(a)=f(a).\end{aligned}$$

□

注意 1.2. 定理 1.1 の逆は成り立たない．実際，実数全体で定義された二つの連続関数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & (x\geqq 0)\\ -x & (x<0),\end{cases}\qquad g(x)=\sqrt[3]{x}$$

は，いずれも 0 で微分可能でない．関数 f のグラフは 0 で角をもつが，g のグラフはなめらかな曲線であることに注意しよう．

区間 I で微分可能な関数 f が与えられたとき，I の各点 x に対して x における f の微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数 $f'\colon I\ni x\mapsto f'(x)\in\boldsymbol{R}$ を考えることができる．これを f の**導関数** [9] という．

例 1.3. 区間 I で微分可能な関数 f の導関数は，連続とは限らない．実際，次の関数を考えよう：

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

---

[8] これは証明が必要な事実であるが，そのためには極限の定義を明確にする必要がある．第 IV 回で扱う．

[9] 導関数：derivative.

すると f は微分可能で，その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．とくに $x_n = 1/(2n\pi)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ とすると，$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるが，$f'(x_n) = -\frac{1}{2}$ なので

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -\frac{1}{2} \neq f'(0).$$

したがって f' は 0 で連続でない． $\diamondsuit$

■ **平均値の定理**　微積分学でもっとも重要な定理の一つが**平均値の定理**[10]である．

定理 1.4 (平均値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された（一変数）連続関数 f が，開区間 (a, b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

定理 1.4 から次の系がただちに従う：

系 1.5. 一変数関数 f が a と $a + h$ を含む区間で微分可能ならば，次をみたす θ が少なくとも一つ存在する：

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)h, \qquad 0 < \theta < 1.$$

証明． まず $h = 0$ の場合はどんな θ をとっても結論の式が成り立つ．

次に $h > 0$ の場合，f は $[a, a + h]$ で微分可能であるから，定理 1.1 よりとくに連続．したがって，定理 1.4 を $b = a + h$ として適用すると

$$f(a + h) = f(a) + f'(c)h \qquad a < c < a + h$$

をみたす c が少なくとも存在する．ここで $\theta = (c - a)/h$ とおけば $a < c < a + h$ から $0 < \theta < 1$ が得られる．

[10] 平均値の定理：the mean value theorem；証明は後で与える．

最後に $h < 0$ の場合は，区間 $[a + h, a]$ に対して平均値の定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(a) - f(a + h)}{a - (a + h)} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(c) \qquad a + h < c < a$$

をみたす c が存在する．ここで $h < 0$ なので $c = a + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$ と表される． □

■ 平均値の定理の応用：関数の近似値

例 1.6. 平方根[11] $\sqrt{10}$ の近似値[12]を求めよう．関数 $f(x) = \sqrt{x}$，$a = 9$，$b = 10$ に対して定理 1.4 を適用すると

$$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{10 - 9} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad \text{かつ} \quad 9 < c < 10$$

をみたす c が存在する．とくに $c > 9$ だから

$$\sqrt{10} < 3 + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{6} < 3.17.$$

一方，$c < 10$ だから，上の式を用いて

$$\sqrt{10} > 3 + \frac{1}{2\sqrt{10}} > 3 + \frac{1}{2\left(3 + \frac{1}{6}\right)} = 3 + \frac{3}{19} > 3 + \frac{3}{20} = 3.15.$$

以上から $3.15 < \sqrt{10} < 3.17$ が得られた．とくに $\sqrt{10}$ を **10 進小数**[13]で表したとき，小数第 1 位は 1, 小数第 2 位は 5 または 6 であることがわかる． $\diamondsuit$

■ 平均値の定理の応用：関数の値の変化

定理 1.7. 区間 I で定義された微分可能な関数が，I 上で $f'(x) = 0$ をみたしているならば，f は I で定数である．

証明． 区間 I 上の点 a をとり固定する．この a と異なる任意の $x \in I$ に対して $f(x) = f(a)$ であることを示せばよい．いま $x > a$ のときは，区間 $[a, x]$ に平均値の定理 1.4 を適用すると，

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c), \qquad a < c < x$$

[11] 平方根 the square root.
[12] 近似値 an approximation.
[13] 10 進小数 a decimal fraction; 小数第一位 the first decimal place.

をみたす c が存在することがわかる．ここで a, $x \in I$ だから $c \in I$ である．したがって仮定から $f'(c) = 0$ なので $f(x) = f(a)$ を得る．一方，$x < a$ のときは区間 $[x, a]$ に関して同様の議論をすればよい． □

系 1.8. 区間 I で定義された微分可能な関数 F, G がともに連続関数 f の原始関数[14] ならば $G(x) = F(x) + C$ (C は定数) と書ける．

証明． 二つの関数 F, G はともに f の原始関数だから $F'(x) = G'(x) = f(x)$．したがって，関数 $H(x) = G(x) - F(x)$ は区間 I 上で $H'(x) = 0$ をみたすから，定理 1.7 より区間 I 上で定数である． □

よく知っているはずの関数の増減は次のように示される：

定理 1.9. 区間 (a, b) で定義された微分可能な関数 f の導関数 が (a, b) で正 (負) の値をとるならば，f は (a, b) で単調増加 (減少) である[15]．

証明． 区間 (a, b) から二つの数 x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ をみたすようにとる．このとき，区間 $[x_1, x_2]$ に対して定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad (a <)x_1 < c < x_2(< b)$$

をみたす c が存在することがわかる．仮定より $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$) なので，$x_2 - x_1 > 0$ であることと合わせて

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \bigl(f(x_2) - f(x_1) < 0\bigr)$$

が得られる．すなわち $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) が成り立つことがわかるので，f は単調増加 (減少)． □

注意 1.10. 微分可能な関数 f の導関数 f' が連続である[16] とき，f の定義域の内点 c で[17] $f'(c) > 0$ ならば，c を含む開区間 I で，f が I 上で単調増加となるものが存在する．実際，f' が連続かつ $f'(c) > 0$ ならば c を含む開区間 I で $f'(x) > 0$ が I 上で成り立つものが存在する (この事実は第 IV 節にて説明する)．

[14] 原始関数 a primitive; 定数 a constant.
[15] 単調増加 (減少) monotone increasing (decreasing); 正 positive; 負 negative.
[16] すなわち C^1-級．
[17] すなわち c を含むある開区間が f の定義域に含まれるような点．

例 1.11. 一般に，微分可能な関数 f の定義域の一点 c で $f'(c) > 0$ だからといって，c を含むある開区間で f が単調増加であるとは限らない．実際，例 1.3 の関数 f は $f'(0) = 1/2 > 0$ をみたしているが，0 を含む任意の開区間 I は，f が単調増加となる区間と単調減少となる区間の両方を含む． ◇

さらに，平均値の定理 1.4 から，次がわかる（問題 I-4）：

定理 1.12 (積分の平均値の定理)**.** 区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f に対して，次をみたす c が存在する：

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)f(c), \qquad a < c < b.$$

■ 平均値の定理の証明　平均値の定理 1.4 を示すには，次の連続関数の性質 (第 IV 節で言及する．ここでは証明を与えない) を用いる：

定理 1.13 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f は，区間 $[a, b]$ で最大値・最小値をもつ．

ここで，区間 I 上の関数 f が $c \in I$ で**最大値** (**最小値**) をとる[18] とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ ($f(x) \geqq f(c)$) が成り立つことである．関数 f が区間 I で**最大値** (**最小値**) をとるとは，上のような $c \in I$ が存在することである．区間 I の点 c が I の**内点**[19] であるとは，c を含む開区間で I に含まれるものが存在することをいう．たとえば閉区間 $I = [a, b]$ に対して $c \in (a, b)$ は I の内点であるが，a, b は I の内点ではない．

補題 1.14. 区間 I で定義された関数 f が I の内点 c で最大値または最小値をとるとする．さらに f が c で微分可能ならば $f'(c) = 0$ が成り立つ．

証明． 点 c は I の内点だから十分小さい正の数 δ をとれば，開区間 $(c - \delta, c + \delta)$ は I に含まれる．いま f は c で微分可能だから，極限値

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

[18] 最大値 the maximum; 最小値 the minimum.
[19] 内点 an interior point

が存在する．とくに f が c で最大値（最小値）をとるならば，$|h|<\delta$ をみたす任意の h に対して $f(c+h)-f(c) \leqq 0$ $(\geqq 0)$ なので

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \begin{cases} \leqq 0 \quad (\geqq 0) \quad (0<h<\delta \text{ のとき}) \\ \geqq 0 \quad (\leqq 0) \quad (-\delta<h<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので，h を 0 に近づけた時の極限値 $f'(c)$ は 0 でなければならない． □

補題 1.15 (ロル[20] の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 F が開区間 (a,b) で微分可能，かつ $F(a)=F(b)$ をみたしているならば，

$$F'(c)=0, \qquad a<c<b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

証明． 関数 F は $[a,b]$ で連続だから，定理 1.13 から c_1, $c_2 \in [a,b]$ で F は c_1 で最大値をとり，c_2 で最小値をとるようなものが存在する．もし c_1, c_2 がともに a, b いずれかの値をとるならば，仮定から $F(c_1)=F(c_2)$ となって，最大値と最小値が一致する．このとき F は定数関数となるので，区間 (a,b) で $F'=0$ となり結論が得られる．そうでない場合は c_1, c_2 の少なくとも一方が開区間 (a,b) に含まれるので，それを c とおけば補題 1.14 より $F'(c)=0$. □

平均値の定理 1.4 **の証明**. 関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

に対してロルの定理 (補題 1.15) を適用すればよい[21]. □

定理 1.16 (コーシー[22] の平均値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに (a,b) で微分可能，$g(a)\neq g(b)$ をみたし，区間 (a,b) 上で $g'(x)\neq 0$ であるとき，次をみたす c が少なくともひとつ存在する：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad a<c<b.$$

[20] Michel Rolle (1652-1719; Fr); ロルの定理 Rolle's theorem.
[21] 教科書に「すればよい」と書いてあったら本当に適用して証明を書き下ろしてみるべきである．
[22] Augustin Louis Cauchy (1789–1857, Fr); これに対して，平均値の定理 1.4 を**ラグランジュの平均値の定理**ということがある; Joseph-Louis Lagrange (1736–1813, It).

証明． 関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\bigl(g(x)-g(a)\bigr)$$

に対してロルの定理 (補題 1.15) を適用すればよい． □

I.2 テイラーの定理

■ 高階の導関数 区間 $I\subset \boldsymbol{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能であるとき，f は 2 階 (2 回) 微分可能である，といい，f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数**[23] という．一般に正の整数 $k\geqq 2$ に対して，k 階微分可能性，k 次導関数が次のように帰納的に定義される：

> 区間 I で定義された関数 f が $(k-1)$ 階微分可能であり，$(k-1)$ 次導関数が微分可能であるとき，f は k 階微分可能であるといい，$(k-1)$ 次導関数の導関数を k 次導関数とよぶ．

関数 f の k 次導関数を次のように書く：

$$f^{(k)}(x), \qquad \frac{d^k}{dx^k}f(x), \qquad \frac{d^ky}{dx^k}.$$

最後の表記は $y=f(x)$ のように従属変数を y と表す．

例 1.17. (1) 正の整数 n に対して $f(x)=x^n$ とすると，$f^{(k)}(x)=n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$ である．とくに $k>n$ ならば $f^{(k)}(x)=0$ である．

(2) $f(x)=e^x$ ならば，任意の負でない整数 k に対して $f^{(k)}(x)=e^x$.

(3) $f(x)=\cos x$ ならば，任意の負でない整数 k に対して $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$ である．とくに，負でない整数 m に対して $f^{(m)}(x)=\cos(x+\frac{m\pi}{2})$ である． ◇

定義 1.18. • 区間 I 上の関数 f が I で連続であるとき，f は C^0-級であるという．

[23] 2 次導関数 the second derivative; k 次導関数 the k-th derivative.

- 区間 I で定義された微分可能な関数 f の導関数が連続であるとき f は **1 階連続微分可能**または C^1-級であるという．
- 区間 I で定義された k 階微分可能な関数 f の k 次導関数が連続であるとき f は k **階連続微分可能**または C^k-級であるという．
- 任意の正の整数 k に対して C^k-級であるような関数を C^∞-級という．

■ テイラーの定理

定理 1.19 (テイラー[24] の定理)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば，$a+h \in I$ となる h に対して

$$
\begin{aligned}
(1.2)\quad f(a+h)&\\
&= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h),\\
&\qquad R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1
\end{aligned}
$$

をみたす θ が少なくともひとつ存在する[25]．

証明． 区間 $[0,1]$ で定義された関数[26]

$$
F(t) := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!}(1-t)^k h^k\right) + (1-t)^{n+1}\left(f(a+h) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k\right)
$$

は微分可能で $F(0)=F(1)=f(a+h)$ をみたしている．これにロルの定理 (補題 1.15) を適用すればよい (問題 I-9)． □

[24] Sir Brook Taylor (1685–1731, En)
[25] 式 (1.2) の総和記号の $j=0$ の項において h^0 は $h=0$ のときも 1 であると約束しておく．
[26] 記号 “:=” は「左辺を右辺によって定義する」ということを表す．

例 1.20. 再び $\sqrt{10}$ の近似値を求めよう．関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に $a=9$, $h=1$, $n=1$ としてテイラーの定理 1.19 を適用すると，

$$
\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{9+\theta}^3}, \qquad 0<\theta<1
$$

をみたす θ が存在することがわかる．とくに，$\theta\in(0,1)$ だから

$$
\begin{aligned}
\sqrt{10} &< 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{8\sqrt{10}^3} = 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{80\sqrt{10}}\\
&\leqq 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{80\sqrt{16}} = 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{320}\\
&\leqq 3+\frac{1}{6}-\frac{3}{1000} = 3+\frac{1}{6}-0.003 \leqq 3.16366\ldots \leqq 3.164\\
\sqrt{10} &> 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{8\sqrt{9}^3} = 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{8\times 27}\\
&\geqq 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{8\times 25} = 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{200} = 3+\frac{1}{6}-0.005 \geqq 3.161
\end{aligned}
$$

となるので

$$
3.161 < \sqrt{10} < 3.164
$$

が成り立つ．とくに $\sqrt{10}=3.16\ldots$ (小数第二位まで正しい)．この場合，テイラーの定理 1.19 の次数 n を 3, 4,... とあげていくと，近似の精度がよくなる（問題 I-12）． ◇

テイラーの定理 1.19 は次のように書くこともできる：

系 1.21 (テイラーの定理)**.** 関数 f が a, b を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば，

$$
\begin{aligned}
(1.3)\quad f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \dots\\
&\qquad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + R_{n+1},\\
&\qquad\qquad R_{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)
\end{aligned}
$$

を満たす a と b の間の数 c が存在する．

問　題　I

I-1 平均値の定理を用いて $\sqrt{5}$ の近似値が 2.2 (小数第一位の数字は 2) であることを示しなさい．同様に，$\sin 0.1$, $\tan 0.1$ の近似値を求めなさい（0.1 radian は何度くらいか?）.

I-2 工太郎君は，午前 10 時に東名高速道路の東京 IC (東京都世田谷区) を自動車で通過し，346.8km 先の小牧 IC (愛知県小牧市) に同じ日の午後 1 時についた．彼がスピード違反をした瞬間が存在することを証明しなさい．(注：日本の高速道路の制限スピードは，時速 110km を超えることはない.)

I-3 定理 1.1 の証明の中の等式変形の一つひとつの等号が成り立つ理由を考えなさい.

I-4 定理 1.12 を証明しなさい．（ヒント：微積分の基本定理を用いる．）

I-5 定理 1.13 の仮定が必要であることを，次のようにして示しなさい：

- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい.
- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.
- 閉区間 $[0,1]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.

I-6 平均値の定理の証明 (7 ページ) を完成させなさい．同様に，コーシーの平均値の定理 1.16 の証明を完成させなさい.

I-7 コーシーの平均値の定理を用いて，次のロピタル[27] の定理の特別な場合を示しなさい：

関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a,a+h)$ で連続，$(a,a+h)$ で微分可能，かつ $g'(x)\neq 0$ $(a<x<a+h)$ が成り立っているとする．さらに $f(a)=g(a)=0$ のとき，

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在

して，両者は等しい.

I-8 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x},\qquad \lim_{x\to +0}\frac{5^x-3^x}{x},\qquad \lim_{x\to +0}\frac{5^x-3^x}{x^2}.$$

I-9 テイラーの定理 1.19 の証明を完成させなさい.

[27] Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661–1704, Fr; l'Hospital とも書かれる.

I-10 任意の実数 α と負でない整数 k に対して

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!},\qquad \binom{\alpha}{0}=1$$

で定まる $\binom{\alpha}{k}$ を**二項係数**[28] という．任意の正の整数 n に対して

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

が成り立つことを示しなさい．(ヒント：次の事実を用いる．「多項式 $f(x)$ の次数が n 以下であることがわかっているとき，$f^{(k)}(0)=0$ $(k=0,1,\dots,n)$ が成り立つなら $f(x)$ は恒等的に 0 である.」)

I-11 次の場合に，式 (1.2) を具体的に書きなさい.

- $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $n=2$.
- $f(x)=e^x$, $a=0$, $n=2$; n は一般の自然数.
- $f(x)=e^x$, a は一般の実数, n は一般の自然数.
- $f(x)=\cos x$, $a=0$, $n=2$; $n=2k-1$ (k は正の整数).
- $f(x)=\sin x$, $a=0$, $n=3$; $n=2k$ (k は正の整数).
- $f(x)=\tan x$, $a=0$, $n=3$.
- $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}\,x$, $a=0$, $n=4$.
- $f(x)=\log(1+x)$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数.
- $f(x)=(1+x)^\alpha$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数．ただし α は実数.

I-12 例 1.20 の n を 3 にして $\sqrt{10}$ の近似値を求めなさい．小数第何位まで求まるか.

I-13 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよう.

- 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に $a=1$, $h=0.1$, $n=2$ としてテイラーの定理 1.19 を書きなさい.
- このとき，$R_3(h)$ 以外の項の総和はいくつか.
- $R_3(h)$ の大きさを不等式で評価することによって，$\sqrt{1.1}$ の値を求めなさい.
- 同じことを $n=3$ として試みなさい.

[28] 二項係数：binomial coefficients.