III. 極値問題

III.1　一変数関数の極値

一変数関数の最大値・最小値は第 I 節の定理 1.13 ですでに扱った：

定義 3.1. 一変数関数 f が a で**最大値** (**最小値**)[1] をとるとは，定義域内のすべての x に対して $f(x) \leqq f(a)$ $(f(x) \geqq f(a))$ が成り立つことである．

例 3.2.
- 関数 $f(x) = x^4$ は $x = 0$ で最小値をとる．
- 次の関数は $\boldsymbol{R}$ で C^∞-級で，任意の k に対して $f^{(k)}(0) = 0$ となる：
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$
（第 II 節の例 2.13 参照）．この関数は $x = 0$ で最小値をとる．　◇

定義 3.3. 一変数関数 f が a で**極大値** (**極小値**)[2] をとるとは，次を満たす正の実数 ε が存在することである：f の定義域に含まれ，かつ $0 < |x - a| < \varepsilon$ を満たす任意の x に対して，$f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ が成り立つ．

これは “a に十分近い x に対して $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ が成り立つ” ことを定量的に述べたものである．

例 3.4.
- 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値（実は最小値）をとる．
- 次の関数 f は $x = 0$ で極小値（実は最小値）をとる：
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$
- 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ は $x = -1$ で極大値，$x = 1$ で極小値をとる．◇

[*] 2017 年 12 月 18 日/22 日 (2017 年 1 月 22 日訂正)
[1] 最大値：the maximum；最小値：the minimum.
[2] 極大値：a maximal; a local maxima; 極小値：a minimal; a local minima: 極値：an extremal.

■ 極値の判定条件

定理 3.5. 関数 f は $x = a$ を含む開区間で C^∞-級とする[3].

A. $f(x)$ が $x = a$ で極値（極大値または極小値）をとるならば，$f'(a) = 0$ である．

B. (**A** の対偶) $f'(a) \neq 0$ ならば，$f(x)$ は $x = a$ で極大値も極小値もとらない．

C. $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)$ が成り立つならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値（極大値）をとる．

例 3.6. $f(x) = x^3 - 3x$ の極値を調べよう．$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ だから $f'(x) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $x = 1$ または $x = -1$ である．したがって定理 3.5 **B** より 1, -1 以外の点では f は極値をとらない．さらに $f''(x) = 6x$ だから，$f''(1) > 0$, $f''(-1) < 0$．したがって定理 3.5 **C** から $f(x)$ は $x = 1$ で極小値 -2, $x = -1$ で極大値 2 をとる．　◇

注意 3.7.
- 定理 3.5 **A** の逆は成立しない．実際 $f(x) = x^3$ は反例．
- 定理 3.5 の **C** の逆は成立しない．実際，例 3.4 が反例になっている．

■ 定理 3.5 の B が成り立つ理由（いい加減バージョン）：

$m = f'(a)$ とおいて，$m > 0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理 2.1 より，$m = f'(a)$ に注意して

$$(*) \qquad f(a+h) = f(a) + mh + R_2(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{R_2(h)}{h} = 0$$

となる．この $R_2(h)$ は h が十分小さければ mh よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h) - f(a) \fallingdotseq mh \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

である[4] が，$m > 0$ だから，この式の右辺は $h > 0$ のとき正，$h < 0$ のとき負になる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h) > f(a) \quad \bigl(h > 0 \text{ のとき}\bigr); \qquad f(a+h) < f(a) \quad \bigl(h < 0 \text{ のとき}\bigr)$$

[3] 記述を煩雑にしないために強い仮定をおいた．実際 **A**, **B** は f が a で微分可能であれば成り立つ．また，**C** は f が 2 回微分可能であれば成り立つ．
[4] “$\fallingdotseq$” は「およそ等しい」

となるので，どんな小さい ε をとっても “$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)>f(a)$”，“$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)<f(a)$” のいずれも成り立たせることはできない．すなわち f は $x=a$ で極値をとらない．

■ 定理 3.5 の B が成り立つ理由（ちょっと正確バージョン）: $m>0$ のとき，$(*)$ までは同様．いま $|R_2(h)/(mh)|$ は h を 0 に近づけると 0 に近づくのだから，正の数 δ をうまくとれば

$$(**) \qquad |h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad \left|\frac{R_2(h)}{mh}\right|<\frac{1}{2}$$

が成り立つようにできる．$m>0$ だから $(**)$ は

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad -\frac{1}{2}m|h|<R_2(h)<\frac{1}{2}m|h|$$

と書き換えられる．したがって $(*)$ より

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad mh-\frac{1}{2}m|h|<f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|$$

となる．ここで，$0<h<\delta$ ならば，$|h|=h$ だから，

$$f(a+h)-f(a)>mh-\frac{1}{2}mh=\frac{1}{2}mh>0,$$

$0>h>-\delta$ なら $|h|=-h$ だから

$$f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|=\frac{1}{2}mh<0$$

となり，どんな小さい ε をとっても $|h|<\varepsilon$ の範囲で $f(a+h)-f(a)$ は符号を変える．したがって（いい加減バージョンと同じ）．

■ 定理 3.5 の C が成り立つ理由（いい加減バージョン）: $m=f''(a)$ とおいて，$m>0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理より（$f'(a)=0, f''(a)=m$ に注意して）

$$f(a+h)=f(a)+\frac{1}{2}mh^2+R_3(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_3(h)}{h^2}=0$$

となる．この $R_3(h)$ は h が十分小さければ $\frac{1}{2}mh^2$ よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h)-f(a) \fallingdotseq \frac{1}{2}mh^2 \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

であるが，$m>0$ だから，この式の右辺は $h\neq 0$ であるかぎり常に正の値をとる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h)>f(a)$$

となるので，$f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．$m<0$ の場合も同様である．

III.2　2 変数関数の極大値・極小値

多変数関数，とくに 2 変数関数の極値問題を考えたい．まず，記号・用語の復習からはじめよう：

実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ と書き，

$$\boldsymbol{R}^2 := \{(x,y)\,|\,x,\ y \text{ は実数}\}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\}=\text{「座標平面」}.$$

とする．点 $(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ と正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(a,b)=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}$$

を点 (a,b) の ε-近傍 [5] という．$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 U が**開集合**であるとは，任意の $(a,b)\in U$ に対してうまく正の数 ε を選べば $U_\varepsilon(a,b)\subset U$ とできることである．また $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 U が**連結** [6] であるとは，任意の 2 点 $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in U$ を U 内の連続曲線で結ぶことができることである．これらの概念を用いて，$\boldsymbol{R}^2$ の連結な開集合のことを **領域** [7] という．

領域 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 f が $(a,b)\in D$ で**極大値** (**極小値**) をとるとは，うまく正の数 ε をとれば，任意の $(x,y)\in U_\varepsilon(a,b)$ ($(x,y)\neq(a,b)$) に対して $f(x,y)<f(a,b)$ ($f(x,y)>f(a,b)$) が成り立つことである．

[5] ε-近傍：an ε-neighborhood；開集合：an open set.

[6] 連結：connected; ここで述べた定義は正確には弧状連結性 pathwise connectedness を表しているが，$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合に対しては連結性と弧状連結性は同値である．

[7] 領域：a domain.

ここでは，1 変数関数に対する極値判定条件（定理 3.5）に相当するような 2 変数関数（多変数関数）極値判定条件を与える．

■ 2 変数関数のテイラーの定理　1 変数関数に関する定理 3.5 は，考えている点の近くでの関数の挙動をテイラーの定理（定理 1.19, 2.1）の 2 次の項までで近似することにより得られた．2 変数関数についても同様のことを考える：

定理 3.8 (2 変数関数のテイラーの定理)**.** 2 変数関数 f が $(x,y)=(a,b)$ を含む領域で C^∞-級であるとする．このとき

$$\begin{aligned}(3.1)\quad f(a+h,b+k) &= f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right)+R_3(h,k)\end{aligned}$$

と書くと

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2}=0$$

が成り立つ．

証明. あたえられた (a,b) および (h,k) に対して，1 変数関数 $F(t)=f(a+th,b+tk)$ を考えると，F は $[0,1]$ で C^∞-級であるから，F にテイラーの定理 1.19 を適用すると，

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\frac{1}{3!}F'''(\theta)\qquad(0<\theta<1)$$

となるような θ が存在する．ここで，合成関数の微分公式（チェイン・ルール [8]）を用いれば，$F(0)=f(a+0h,b+0k)=f(a,b)$,

$$\begin{aligned}F'(0)&=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\ F''(0)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\\ F'''(\theta)&=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の式の右辺の偏微分は $(a+\theta h,b+\theta k)$ での値である．とくに f は C^∞-級なので，f の任意の階数の偏導関数は連続である．したがって，例えば

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h,b+\theta k)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)$$

[8] チェイン・ルール：the chain rule, テキスト，第 4 章（定理 4.2.4）．

が成り立つ．したがって $(h,k)=(r\cos t,r\sin t)$ $(r>0)$ とおけば $(h,k)\to(0,0)$ すなわち $r\to 0$ のとき

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h,b+\theta k)\frac{h^3}{h^2+k^2}\right)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h,b+\theta k)r\cos^3 t\right)\to 0$$

が成り立つ．$F'''(\theta)$ の他の項も同様に考えれば $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}F'''(\theta)/(h^2+k^2)=0$ を得る．　□

注意 3.9. 定理 3.8 は 2 次式による f の近似とみなすことができる．とくに，(3.1) の h, k に関する 1 次の項までをとれば，1 次式による近似

$$\begin{aligned}(3.2)\quad f(a+h,b+k)&=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k+R_2(h,k),\\ &\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．

注意 3.10. テイラーの公式 (3.1) の右辺のうち，h, k の 1 次の項は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=df(a,b)\boldsymbol{h}\qquad\left(\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\right)$$

と表される．ただし $df(a,b)=\bigl(f_x(a,b),f_y(a,b)\bigr)$ は (a,b) における f の **全微分** [9] である．さらに h, k の 2 次の項の 2 倍は,

$$(3.3)\quad (h,k)\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(a,b)\boldsymbol{h},$$

$$\text{ただし，}\qquad \mathrm{Hess}\,f(a,b):=\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{h}$ は列ベクトル $\boldsymbol{h}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．ここで，偏微分の順序交換定理 [10] から，$\mathrm{Hess}\,f(a,b)$ は 2 次の**対称行列** [11] となる．この行列を f の (a,b) における**ヘッセ行列** [12] とよぶ.

[9] 全微分：the total differential. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して $df:=(f_x,f_y)$ を f の全微分という．とくに，関数 $\varphi(x,y)=x$, $\psi(x,y)=y$ の全微分はそれぞれ $(1,0)$, $(0,1)$ なので $dx=(1,0)$, $dy=(0,1)$ と書ける．これを用いて $df=f_x\,dx+f_y\,dy$ と書くこともある．
[10] 偏微分の順序交換：テキスト 4 節（定理 4.3.1）.
[11] 対称行列：a symmetric matrix.
[12] ヘッセ行列：the Hessian matrix; Hesse, Ludwig Otto, 1811–1874, de.

■ 2 変数関数の極値判定

定理 3.11. $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b) \in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

が成り立つ．

証明. 関数 f が (a,b) で極小値をとるならば，次をみたす正の数 ε が存在する：$h^2+k^2 < \varepsilon^2$ ならば $f(a+h,b+k) > f(a,b)$．とくに $|h| < \varepsilon$ のとき $f(a+h,b) > f(a,b)$ なので $F(h) := f(a+h,b)$ は $h = 0$ で極小値をとる．したがって定理 3.5 から $F'(0) = f_x(a,b)$ は 0 である．同様に $G(k) = f(a,b+k)$ を考えれば $f_y(a,b) = 0$ が成り立つ． □

定理 3.12. $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b) \in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

をみたしているとする．このとき，

$$\begin{aligned} \Delta &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 = \det \operatorname{Hess} f(a,b), \\ A &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \end{aligned}$$

とおくと，

- $\Delta > 0$ かつ $A > 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極小値をとる．
- $\Delta > 0$ かつ $A < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる．
- $\Delta < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値をとらない．

これを示すために次の補題を用いる：

補題 3.13. h と k の斉次 2 次式

$$(**) \qquad \varphi(h,k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \qquad (A,\ B,\ C \text{ は定数})$$

に対して

- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) > 0$ となるための必要十分条件は $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) < 0$ となるための必要十分条件は $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- φ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC - B^2 < 0$ となることである．
- それ以外（$AC - B^2 = 0$）の場合は，φ は符号を変えないが，$\varphi = 0$ となるような $(h,k) \neq (0,0)$ が存在する．

証明. 2 次式の平方完成

$$\varphi(h,k) = \begin{cases} A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}k^2 & (A \neq 0) \\ C\left(k + \frac{B}{C}h\right)^2 + \frac{AC-B^2}{C}h^2 & (C \neq 0) \\ 2Bhk & (A = C = 0) \end{cases}$$

からわかる． □

定理 3.12 の証明（いい加減バージョン）. 定理 3.8 と仮定から

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\varphi(h,k) + R_3(h,k), \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2} = 0$$

が成り立つ．ただし $A := f_{xx}(a,b)$, $B := f_{xy}(a,b)$, $C := f_{yy}(a,b)$ に対して

$$\varphi(h,k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

とおいた．$h^2 + k^2$ が十分小さいときは $|R_3(h,k)|$ は $|\varphi(h,k)|$ に比べて小さいので $f(a+h,b+k) - f(h,k)$ は $\frac{1}{2}\varphi(h,k)$ で近似されるので，補題 3.13 から結論が得られる． □

III.3 三変数以上の場合

一般に $\boldsymbol{R}^n$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f をベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ に実数 $f(\boldsymbol{x})$ を対応させているとみなしておく．このとき，定理 3.8 の証明の真似をすれば，

$$(3.4) \qquad f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{h} \operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + R_3(\boldsymbol{h}),$$

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_3(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = 0$$

を得る．ただし

$$df(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right),$$

$$\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

このとき，

事実 3.14.
- f が $\boldsymbol{a}$ で極値をとるならば $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ である．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})$ の固有値がすべて正 (負) ならば f は $\boldsymbol{a}$ で極小値（極大値）をとる．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})$ の固有値が符号を変えるならば f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない．

この事実の後半の 2 つは，次に述べる 2 次形式の性質からわかる：

実数の変数 $(x_1, \dots, x_n)$ の斉次 2 次式を (n 変数の) **2 次形式**という．2 次形式は

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

の形で表される．とくに $x_i x_j = x_j x_i$ であるから，a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように係数を按分することができる．すなわち 2 次形式の一般形は

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

これを，列ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ と対称行列 $A = (a_{ij})$ を用いて

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} \qquad (A \text{ は実対称行列}) \tag{3.5}$$

と表すことができる．行列 A を 2 次形式 φ の**表現行列**という．

事実 3.15 (線形代数の復習)**.**
- 実数を成分とする対称行列の固有値は実数である．
- 実数を成分とする対称行列 A は直交行列により対角化できる．

すなわち，実数を成分とする対称行列 A に対して，直交行列 P が存在して

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \qquad ({}^tPP = E = \text{単位行列})$$

とできる．ただし $\mu_1, \dots, \mu_n$ は A の固有値である．このことを用い，変数変換

$$\boldsymbol{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n) := {}^tP\boldsymbol{x}$$

を行うと，2 次形式 (3.5) は

$$\varphi = \mu_1 X_1^2 + \dots + \mu_n X_N^2$$

と書くことができる．とくに

- $\mu_1, \dots, \mu_n$ がすべて正ならば，任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$ が成立する．このとき 2 次形式 (3.5) は**正値**または**正定値**という．
- $\mu_1, \dots, \mu_n$ がすべて負ならば，任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\varphi(\boldsymbol{x}) < 0$ が成立する．このとき 2 次形式 (3.5) は**負値**または**負定値**という．
- $\mu_1, \dots, \mu_n$ の中に正のものも負のものも含まれているならば，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は正，負いずれの値もとる．

問　題　III

III-1 (1) 関数 $f(x) = x^4$ が $x = 0$ で最小値をとることを証明しなさい（例 3.2）.

(2) C^∞-級関数 f の $x = a$ における (1 次，2 次 ...) 微分係数を用いて f が $x = a$ で最大値・最小値，極大値・極小値をとるかどうかを判定するような必要十分条件はあり得ない．そのことの理由を述べなさい（例 3.2 を参照せよ）.

(3) 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値をとる（実は最小値をとる）ことを示しなさい（例 3.4）.

III-2 関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ のグラフを描き，どこで極値 (極大値・極小値) をとるかを指摘しなさい．それらの点で f は最大値・最小値をとるか.

III-3 (1) 定理 3.5 の **A** (**B**) の逆は成立しないことを確かめなさい（注意 3.7）.

(2) 定理 3.5 の **C** の逆は成立しないことを確かめなさい（注意 3.7）.

III-4 関数 $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2$ (p, q は定数) の極値を調べなさい.（ヒント：3 次方程式 $f'(x) = 0$ が一つの実数解しか持たない場合，3 つの異なる実数解を持つ場合，1 組の重根とそれ以外の一つの解を持つ場合，3 重根を持つ場合に分けて考える）

III-5 定理 3.5 の **B** が成り立つ理由の「いい加減バージョン」の $m < 0$ の場合を完成させなさい.

III-6 定理 3.5 の **C** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」をつくりなさい.

III-7 定理 3.5 の状況で $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ のときはなにが起きているか.

III-8 次の集合は $\boldsymbol{R}^2$ の領域か.

$$\boldsymbol{R}^2,\quad \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y > 0\},\quad \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y \geqq 0\},$$
$$\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\},\quad \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

III-9 補題 3.13 の証明を完成させなさい.

III-10 $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$ に対して

- $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めなさい.（ここで虚数解は考えない．なぜか）
- 上で求めた (x,y) に対して定理 3.12 を適用することにより，次のことを確かめなさい：「$f(x,y)$ は $(x,y) = (1/3, 1/3)$ で極小値 $-1/27$ をとり，それ以外の点では極値をとらない.」

III-11 関数 $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$ の極値を調べなさい．ただし a, b は正の定数である（テキスト 74 ページ問題 10）.

III-12 関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ の極値を調べなさい.

III-13 $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された関数 $f(x,y)$ が**調和関数**[13] であるとは，D 上で $f_{xx} + f_{yy} = 0$ が成り立つことである．調和関数 f の 2 次偏導関数 f_{xx} が D 上で 0 にならなければ f は D 上で極値をとらない．このことを証明しなさい.

[13] 調和関数：a harmonic function.