IV. 極限と連続性

IV.1　数列の極限

■ **実数の絶対値**　実数 x に対して,「$x \geqq 0$ のとき $|x| = x$, $x < 0$ のとき $|x| = -x$」で定まる数 $|x|$ を x の**絶対値**という．任意の実数 x, y に対して

$$(4.1) \qquad |x| \geqq 0, \quad |x| \geqq x, \quad |-x| = |x|, \quad |x|^2 = x^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$$

が成り立つことがわかる．また，実数 a と正の数 δ に対して次が成り立つ：

$$(4.2) \qquad |x-a| < \delta \quad \text{であるための必要十分条件は} \quad a-\delta < x < a+\delta.$$

補題 4.1 (三角不等式[1])**.** 任意の実数 x, y に対して次が成り立つ：

$$\text{(a)} \quad |x+y| \leqq |x| + |y|, \qquad \text{(b)} \quad \bigl||x| - |y|\bigr| \leqq |x-y|.$$

証明. $(x,y) = (0,0)$ なら不等式は明らか．$(x,y) \neq (0,0)$ のとき，(4.1) から

$$\begin{aligned}(|x|+|y|-|x+y|)(|x|+|y|+|x+y|) &= (|x|+|y|)^2 - (|x+y|^2) \\ &= |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 - (x+y)^2 = 2(|xy| - xy) \geqq 0\end{aligned}$$

だが，$|x|+|y|+|x+y| > 0$ なので (a) を得る．

さらに (a) を用いれば

$$|x| = |y+(x-y)| \leqq |y| + |x-y|, \quad |y| = |x+(y-x)| \leqq |x| + |y-x| = |x| + |x-y|$$

なので (b) が得られる．□

■ **数列の極限**　**数列** $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ を $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$，または $\{a_n\}$ と書く：

定義 4.2. 数列 $\{a_n\}$ が実数 α に**収束する**[2] とは，次が成り立つことである．

任意の正の実数 ε に対して以下をみたす番号 N が存在する[3]：
$n \geqq N$ をみたす任意の番号 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．

*)2017 年 12 月 25 日/2018 年 1 月 5 日 (2018 年 1 月 5 日訂正)

[1] 三角不等式：the triangle inequality. この名前は，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きい，という定理に対応する不等式 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の類似しているところから来ている．

[2] 数列 $\{a_n\}$ が α に収束する：A sequence $\{a_n\}$ converges to α.；発散する：to diverge.

[3] ここでは「番号」で負でない整数のことを表す．

このとき「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」,「$a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$」と書き，$\alpha$ を $\{a_n\}$ の**極限値**という．数列 $\{a_n\}$ がいかなる数にも収束しないとき，**発散する**という．

定義 4.3. 数列 $\{a_n\}$ が**正の** (**負の**) **無限大に発散する**とは[4]，

「任意の実数 M に対して，次をみたす番号 N が存在する：$n \geqq N$ をみたす任意の番号 n に対して $a_n > M$ ($a_n < M$) が成り立つ」

が成立することである．このことを「$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$」と書く．

補題 4.4. (1)　数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，次をみたす実数 M が存在する：任意の番号 n に対して $|a_n| \leqq M$．[5]

(2)　数列 $\{a_n\}$ が正の数 α に収束するなら，ある番号 N で，$n \geqq N$ をみたす任意の n に対して $a_n \geqq \frac{\alpha}{2}$ が成り立つものが存在する．とくに，ある番号から先は a_n は正である．

(3)　数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するなら数列 $\{1/a_n\}$ は 0 に収束する．

証明. (1): 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するなら（定義 4.2 の ε として 1 をとる）「$n \geqq N$ をみたす n に対して $|a_n - \alpha| < 1$」となる番号 N が存在する．この N に対して $M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |\alpha - 1|, |\alpha + 1|\}$ とすれば[6]，M は結論をみたす．

(2): 定義 4.2 の ε として $\alpha/2\ (>0)$ をとれば「$n \geqq N$ をみたす任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \alpha/2$」となる番号 N が存在する．この N に対して結論が成り立つ．

(3): 正の数 ε を任意にとると，（定義 4.3 の M を $1/\varepsilon$ として）「$n \geqq N$ ならば $|a_n| > 1/\varepsilon$」となる番号 N が存在する．このとき $n \geqq N$ ならば $|1/a_n| < \varepsilon$．□

補題 4.5. (1)　定数 c に対して $a_n = c$ とすると $\{a_n\}$ は c に収束する．

(2)　数列 $\{a_n\}$ が α に，$\{b_n\}$ が β に収束するとき，$n \to \infty$ で

$$\text{(a)} \quad a_n + b_n \to \alpha + \beta, \qquad \text{(b)} \quad a_n b_n \to \alpha\beta, \qquad \text{(c)} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ．ただし (c) では $\beta \neq 0$ と仮定する．

証明. (1): 正の数 ε を任意にとり，$N = 0$ とすると，$n \geqq N$ をみたす任意の n に対して $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. (2) (a)：番号 N_1, N_2 を「$n \geqq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」,「$n \geqq N_2$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$」となるようにとり $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと，$n \geqq N$ ならば三角不等式（補題 4.1）から

[4] 正（負）の無限大に発散する：to diverge to the positive (negative) infinity.

[5] このとき数列 $\{a_n\}$ は有界であるという．

[6] $\max\{\dots\}$ は $\{\dots\}$ 内の有限個の数のうち最大のものを表す．

$$|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| = |(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)| \leqq |a_n-\alpha|+|b_n-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) (b)：補題 4.4 の (1) から $|a_n| \leqq M$ をみたす正の実数 M が存在する．与えられた正の数 ε に対して番号 N を，

$$|a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, \qquad |b_n-\beta| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (n \geqq N)$$

となるようにとり（$\beta=0$ の場合は第一の条件は不要），式変形

$$a_nb_n-\alpha\beta = a_nb_n-a_n\beta+a_n\beta-\alpha\beta = a_n(b_n-\beta)+\beta(a_n-\alpha)$$

を用いればよい．(2) (c)：(b) を認めれば，$1/b_n \to 1/\beta$ を示せば十分．補題 4.4 の (2) から，ある番号 N_1 を「$n \geqq N_1$ ならば $|b_n| \geqq |\beta/2|$」となるようにとれる．一方，$b_n \to \beta$ なので「$n \geqq N_2$ ならば $|b_n-\beta| < \beta^2\varepsilon/2$」となるような番号 N_2 をとることができる．そこで，$N=\max\{N_1,N_2\}$ とおけば結論が得られる． □

補題 4.6 (はさみうち)**.** (1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束し，さらにすべての番号 n に対して $a_n \leqq b_n$ が成り立つならば $\alpha \leqq \beta$.

(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が，各番号 n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ をみたし，さらに，$\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ値 α に収束するならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$.

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して，各項の絶対値をとった数列 $\{|a_n|\}$ が 0 に収束するなら，$\{a_n\}$ も 0 に収束する.

(4) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がすべての番号 n に対して $a_n \leqq b_n$ をみたし，$\{a_n\}$ が正の無限大に発散するならば，$\{b_n\}$ も正の無限大に発散する.

証明. (1): 背理法による．$\beta < \alpha$ と仮定すると $\varepsilon := (\alpha-\beta)/3$ は正の実数である．このとき「$n \geqq N_1$ をみたす任意の n に対して $|a_n-\alpha| < \varepsilon$」,「$n \geqq N_2$ をみたす任意の n に対して $|b_n-\beta| < \varepsilon$」となる番号 N_1, N_2 が存在する．したがって，$N=\max\{N_1,N_2\}$ とすると，ε のとり方から，次のように矛盾が得られる：

$$\alpha-\varepsilon < a_N \leqq b_N < \beta+\varepsilon \quad \text{だから} \quad \frac{2}{3}\alpha+\frac{\beta}{3} \leqq \frac{2}{3}\beta+\frac{\alpha}{3} \quad \text{すなわち} \quad \alpha \leqq \beta.$$

(2): 任意の番号 n に対して $a_n-\alpha \leqq c_n-\alpha \leqq b_n-\alpha$ なので

$$|c_n-\alpha| \leqq \max\{|a_n-\alpha|, |b_n-\alpha|\} \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

が成り立つ．ここで $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに α に収束するから，任意の正の数 ε に対して，ある番号 N で「$n \geqq N$ ならば $|a_n-\alpha| < \varepsilon$, $|b_n-\alpha| < \varepsilon$」が成り立つものが存在する．この N に対して $n \geqq N$ ならば $|c_n-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

(3): $-|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|$ と (2) を用いる．(4): 任意の実数 M をとると「$n \geqq N$ ならば $a_n > M$」となる番号 N が存在する．この N に対して $n \geqq N$ なら $b_n \geqq a_n > M$ なので結論が得られた． □

IV.2 実数の連続性

実数全体の集合[7] $\boldsymbol{R}$ は (1) 加減乗除が自由にでき，(2) 大小の関係が定義されて，然るべき性質をみたす，という重要な性質をもつが，これらは有理数全体の集合ももつ性質である．実数全体の集合を特徴付ける性質は，高等学校ではあからさまに述べられていないので，ここで紹介する.

集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ が**上に有界**（**下に有界**）とは,「任意の $x \in A$ に対して $x \leqq M$（$x \geqq M$）」が成り立つような実数 M が存在することである[8]．このような M を A の**上界**（**下界**）という．上下に有界な集合を単に**有界**であるという.

定義 4.7. 上（下）に有界な集合 A の上界（下界）のうち最小（最大）のものを A の**上限**（**下限**）[9] といい，$\sup A$ ($\inf A$) と書く.

補題 4.8. 数 α が集合 A の上限（下限）であるための必要十分条件は次の 2 つが成り立つことである：(1) 任意の $x \in A$ に対して $x \leqq \alpha$（$x \geqq \alpha$）．(2) $a < \alpha$ （$a > \alpha$） ならば $a < x \leqq \alpha$（$\alpha \geqq x > a$） をみたす $x \in A$ が存在する.

証明. α が A の上界であることと (1) は同値である．また α より小さい任意の実数 a が A の上界でないことと (2) は同値である． □

系 4.9. 集合 A の上界 M が A の要素ならば M は A の上限である.

公理 4.10 (実数の連続性[10][11])**.** 上に（下に）有界な，空集合でない実数の集合は上限（下限）をもつ.

注意 4.11. 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は公理 4.10 の性質をもたない．たとえば $A := \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^2 < 2\}$ は上に有界な有理数の集合だが，上限は存在しない．実際 $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ なので 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422,... は A の上界であるが，その最小数は $\boldsymbol{Q}$ の中にない.

---

[7] 実数全体の集合：the set of real numbers.
[8] 有界：bounded; 上に有界：bounded from above; 下に有界：bounded from below.
[9] 上限：the supreimum, 下限：the infimum.
[10] 実数の連続性：continuity of real numbers.
[11] 公理 (an axiom) とは，議論の最初におく仮定のことをいう．ここでは，実数全体の集合を，その性質によって間接的に定義していることになっている.

数列 $\{a_n\}$ の全部の項がなす集合が上に（下に）有界なとき，数列は上に（下に）有界であるという．一方，数列 $\{a_n\}$ が**単調非減少**（**単調非増加**）であるとは

$$a_j \leqq a_{j+1} \qquad (a_j \geqq a_{j+1}) \qquad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つことである．

定理 4.12. 上に（下に）有界な単調非減少（単調非増加）数列は収束する [12]．

証明. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界かつ単調非減少とすると，公理 4.10 から集合 $\{a_n\}$ の上限 α が存在する．このとき，各項は $a_n \leqq \alpha$ をみたす（補題 4.8 (1)）．さらに，任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < a_N$ をみたす番号 N が存在する（補題 4.8 (2)）．すると，単調非減少であることから，$n > N$ をみたす任意の番号 n に対して $\alpha - \varepsilon < a_N \leqq a_n (\leqq \alpha)$. したがって $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となるので，極限の定義から $\{a_n\}$ は α に収束する． □

命題 4.13. 自然数の列 $\{n\}$ は上に有界ではない．（アルキメデス [13] の原理）．

証明. 数列 $\{n\}$ が上に有界ならば，公理 4.10 から収束する．極限値を α とすると，定義 4.2 の ε を $\frac{1}{2}$ として，「$n \geqq N$ ならば $|n - \alpha| < \frac{1}{2}$」となるような N が存在する．とくに $\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}$ $(n \geqq N)$ であるが，n を一つ増やすとこの区間からはみ出してしまい，矛盾．したがって，この数列は上に有界でない． □

次は命題 4.13 の言い換えである：

系 4.14. 任意の実数 M に対して $M < n$ をみたす自然数 n が存在する．

系 4.15. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

証明. 任意の実数 M に対して系 4.14 から，$N > M$ をみたす自然数 N が存在する．このとき，$n \geqq N$ をみたす任意の番号 n に対して $M < N < n$. したがって数列 $\{n\}$ は正の無限大に発散する．後半は補題 4.4 から従う． □

連続性の公理から，次のことがわかる：

定理 4.16. 閉区間 $I = [\alpha, \beta]$ 内の数列 $\{p_n\}$ に対して，増加する番号の列 $n_0 < n_1 < n_2 \dots$ で数列 $\{p_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ が I の要素に収束するものが存在する [14]．

[12] 実は定理 4.12 は公理 4.10 と同値である．すなわち，連続性の公理をこの命題に置き換えても論理的には全く差し支えない．

[13] Archimedes, B.C. 287–B.C .212; Gr.

[14] この事実を「有界数列は収束する部分列をもつ」ともいう．

証明. 各番号 k に対して集合 $Q_j := \{p_j, p_{j+1}, \dots\}$ は上に有界なので，連続性の公理 4.10 から $q_j := \sup Q_j$ が存在する．とくに $Q_{j+1} \subset Q_j$ だから $q_{j+1} \leqq q_j$. また Q_j の各要素は α 以上だから，$q_j \geqq \alpha$. したがって $\{q_j\}$ は下に有界な単調非増加数列だから，定理 4.12 からある実数 γ に収束する．そこで，$\{p_n\}$ から項を選んで γ に収束する数列を構成しよう：まず $n_0 = 0$ として，次のように帰納的に n_j を定める：n_j が与えられたとき，Q_{n_j+1} の上限は q_{n_j+1} だから，$p_m > q_{n_j+1} - (1/(j+1))$ となる m $(m \geqq n_j + 1)$ が存在する．この m を n_{j+1} と定める．すると，$q_{n_{j+1}} - (1/j) < p_{n_j} \leqq \gamma$ が成り立つが，数列 $\{q_{n_j+1}\}$ は $\{q_n\}$ と同様に γ に収束するので，$j \to \infty$ とすれば $\{p_{n_j}\}$ が γ に収束することがわかる． □

IV.3 関数の極限

数列にならって，関数の極限を「限りなく」などの語を用いずに定義する [15]．

定義 4.17. 数直線上の区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \to a$ で α に**収束する**とは，次が成り立つことである：

任意の正数 ε に対して以下をみたす正の数 δ が存在する：

$0 < |x - a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

このことを「$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$」,「$f(x) \to \alpha$ $(x \to a)$」と表す．また，

任意の正数 ε に対して以下をみたす正の数 δ が存在する [16]：

$0 < x - a < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

が成り立つとき，x が a に（右から）近づくときの f の**右極限値**は α であるといい，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ と書く．左極限値も同様.

この定義によって第 II 回の補題 2.23 に証明を与える：

補題 4.18 (補題 2.23). 点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I \setminus \{a\} = \{x \in I \mid x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$ をみたしているならば，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ である．

証明. 任意の正の数 ε に対して，正の数 δ_1, δ_2 で「$0 < x - a < \delta_1$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」,「$-\delta_2 < x - a < 0$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」となるようなものをとることができる．そこで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと，$0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ となる． □

[15] ここでの定義を，習慣的に用いる文字を使って “ε-δ 式の定義” という．コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857 Fr) によるものらしい．

命題 4.19. 区間 I から a を取り除いた集合で定義された関数 f が $x \to a$ で正の数 α に収束するならば，次をみたす正の数 δ が存在する:「$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > 0$ である.」

証明. 定義 4.17 の条件が成り立っているのだから，とくに $\varepsilon = \alpha/2$ とおいてやれば「$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$ が成り立つ」ような δ が存在する．このとき，$0 < |x-a| < \delta$ ならば $f(x) - \alpha > -\frac{\alpha}{2}$，すなわち $f(x) > \frac{\alpha}{2} > 0$. □

定義 4.20. (1) 区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \to a$ で正の無限大に発散するとは，次が成り立つことである：

任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 δ が存在する：$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

このことを「$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$」「$f(x) \to +\infty\ (x \to a)$」と書く．

(2) 数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \to +\infty$ で実数 α に収束する（$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$）とは，次が成り立つことである：

任意の正の数 ε に対して以下をみたす正の数 $m\ (> b)$ が存在する：$x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

(3) 数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \to +\infty$ で正の無限大に発散する（$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$）とは，次が成り立つことである：

任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 $m\ (> b)$ が存在する：$x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

負の無限大への発散，$x \to -\infty$ のときの極限も同様に定義することができる．

定理 4.21. 区間 I から $a \in I$ を除いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ をみたすための必要十分条件は，

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = a, \qquad a_n \in I \setminus \{a\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をみたす**任意の**数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha$ が成り立つことである．

証明. 〔必要性〕$f(x) \to \alpha\ (x \to a)$ とするとき，$(*)$ をみたす数列 $\{a_n\}$ が，$f(a_n) \to \alpha\ (n \to \infty)$ をみたすことを示したい：正の数 ε を任意に取ると，$f(x) \to \alpha$ であることから「$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」をみたす正の数 δ が存在する．ここで $a_n \to a$ であるから，この δ に対して「$n \geqq N$ ならば $|a_n - a| < \delta$」となるような番号 N をとることができる．とくに $(*)$ から $a_n \neq a$ なので，ここでとった N に対して $n \geqq N \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - \alpha| < \varepsilon$ となる．ε は任意だったので $f(a_n) \to \alpha$ が得られた．

〔十分性〕対偶を示す．すなわち「$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ でない」を仮定して，結論「(任意の数列 $\{a_n\}$ が $(*)$ をみたすならば $f(a_n)$ は α に収束する）でない」を導く．仮定，結論を書き換えると（節末の補足参照）

仮定： 次をみたす ε が存在する：任意の正の数 δ に対して，$0 < |x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる x がとれる．

結論： 次をみたす数列 $\{a_n\}$ が存在する：$(*)$ をみたし，$f(a_n)$ は α に収束しない．

この仮定をみたす正の数 ε をとって固定しておく．このとき，任意の番号 n に対して $\delta = 1/n$ とおけば，$0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(a_n) - \alpha| \geqq \varepsilon$ となるような a_n をとることができる．こうして得られた数列 $\{a_n\}$ は条件 $(*)$ をみたす（確かめよ）．一方，$|f(a_n) - \alpha| \geqq \varepsilon$ がすべての n に対して成り立つから $\{f(a_n)\}$ は α に収束しない．□

注意 4.22. 定理 4.21 を否定することで，関数 f が $x \to a$ で α に収束しないための必要十分条件は，次のような数列 $\{a_n\}$ が存在すること [17] である：

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \qquad \text{かつ} \qquad \{f(a_n)\} \text{ は } \alpha \text{ に収束しない.}$$

IV.4 連続関数

定義 4.23. 区間 I で定義された関数 f が I の点 a で**連続**であるとは，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

をみたすことである．とくに，I の各点で連続な関数を**区間 I で連続**という．

とくに，定理 1.1 より微分可能な関数は連続である．

例 4.24. 関数 f が a を含む開区間で C^1-級（注意 1.10 参照）で，$f'(a) > 0$ が成り立っているならば，f が I 上で単調増加であるような a を含む開区間 I が存在する．実際，C^1-級であることから $f'(x)$ は連続だから $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a) > 0$．したがって，命題 4.19 から $0 < |x-a| < \delta$ ならば $f'(x) > 0$ となる正の数 δ が存在する．このことと定理 1.9 から f は区間 $(a - \delta, a + \delta)$ で単調増加である．例 1.3 と比較せよ． ◇

[17] 定理 4.21 の状況で，収束をいうためには a に収束する**任意の**数列 $\{a_n\}$ に対して $\{f(a_n)\}$ が α 収束することを言わなければならないが，収束しないことをいうためには，$\{f(a_n)\}$ が α に収束しないような $\{a_n\}$ をひとつ見つければよい．

■ 最大・最小値の定理　平均値の定理 1.4 の証明で，連続関数に関する最大・最小値の定理（定理 1.13）を用いた．ここではこれに証明を与えよう．

定理 4.25 (最大・最小値の定理（定理 1.13））**.** 閉区間 $I = [\alpha, \beta]$ で連続な関数 f は，I で最大値・最小値をとる．

証明. 最大値の存在のみを示す：関数 f の像 $Y := \{f(x) \,|\, \alpha \leqq x \leqq \beta\}$ は実数の集合で，上に有界である．実際，もし A が上に有界でないなら，任意の番号 n に対して $y_n \geqq n$ となる $y_n \in Y$ が存在する．ここで $y_n \in Y$ なので $y_n = f(x_n)$ をみたす $x_n \in [\alpha, \beta]$ をとることができる．すると定理 4.16 から，部分列 $\{x_{n_j}\}$ で $\gamma \in [\alpha, \beta]$ に収束するものが存在する．このとき $n_j \leqq y_{n_j} = f(x_{n_j})$ だが，$j \to +\infty$ のとき n_j は $+\infty$ に発散するのに対し，定理 4.21 と f の連続性から $f(x_{n_j})$ は $f(\gamma)$ に近づき，矛盾が生じる．

したがって f の像 Y は有界なので，$\eta := \sup Y$ $(\leqq 0)$ とおく．このとき，補題 4.8 から，(1) 任意の $x \in [\alpha, \beta]$ に対して $f(x) \leqq \eta$, (2) 各番号 n に対して $\eta - (1/n) < y_n = f(x_n)$ となるような $x_n \in [\alpha, \beta]$ が存在する．そこで数列 $\{x_n\}$ の，ある $\gamma \in [\alpha, \beta]$ に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をとる（定理 4.16）と，

$$\eta = \lim_{j\to\infty}\left(\eta - \frac{1}{n_j}\right) \leqq \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) \leqq \lim_{j\to\infty} \eta = \eta$$

したがって，$f(\gamma) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \eta$．このことは f が γ で最大値をとることを示している（問題 IV-10）． □

■ 中間値の定理　高等学校で学んだ中間値の定理 [18] も，最大・最小値の定理と同様，実数の連続性の帰結である．

定理 4.26 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[\alpha, \beta]$ で連続な関数 f が $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ をみたすならば，$f(\gamma) = 0$, $\alpha < \gamma < \beta$ をみたす実数 γ が少なくともひとつ存在する．

証明. 集合 $Y := \{x \in [\alpha, \beta] \,|\, f(x) \leqq 0\}$ は空でない，上に有界な集合である．そこで $\gamma = \sup Y$ とおく．この γ が求めるものである．実際，各番号 n に対して $x_n \in Y$ で $\gamma - (1/n) < x_n \leqq \gamma$ となるものが存在する．とくに $\{x_n\}$ は γ に収束するので，定理 4.21 から $f(x_n)$ は $f(\gamma)$ に収束する．とくに $x_n \in Y$ から $f(x_n) < 0$ なので補題 4.6 から $f(\gamma) \leqq 0$．したがって仮定より $\gamma < \beta$．いま $f(\gamma) < 0$ とすると，命題 4.19 を $-f$ に適用すれば，$\gamma - \delta < x < \gamma + \delta$ で $f(x) < 0$ となるような正の数 δ がとれる．とくに γ より大きい x で $x \in Y$ となるものが存在し，γ が上限であることに矛盾する．したがって $f(\gamma) = 0$ となる． □

[18] 中間値の定理：the intermediate value theorem.

補足：ド・モルガンの法則

今回使った「収束することの否定」を記述するために，ド・モルガンの法則 [19] の復習をしておく．ここでは，P, Q, R などで，真(しん)・偽(ぎ)いずれかの値をとる文を表すこととする [20]．このとき，次のように定める [21]

- 「P かつ Q」は，P, Q がともに真のとき真，それ以外は偽.
- 「P または Q」は，P, Q がともに偽のとき偽，それ以外は真.
- 「P でない」は P の真・偽を入れ替える.
- 「P ならば Q」は P が真で Q が偽となるとき偽，それ以外は真.

とくに

(4.3)　「P ならば Q」　は　「(P でない) または Q」　と同値.

事実 (ド・モルガンの法則)**.**

「(P かつ Q) でない」　は「(P でない) または (Q でない)」と同値,

「(P または Q) でない」は「(P でない) かつ (Q でない)」　と同値.

ド・モルガンの法則と (4.3) から

(4.4)　「(P ならば Q) でない」　は　「P かつ (Q でない)」　と同値.

さて，不定の文字 x を含む文 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

- 「すべての x に対して $P(x)$」
- 「ある x に対して $P(x)$」すなわち「$P(x)$ となる x が存在する」

という形の文を全称命題（前者），特称命題（後者）という．全称命題は，考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を “and” でつなげたもの，特称命題は，考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を “or” でつなげたものとみなせる．これらの否定についても，有限個の and, or の場合と同様の法則が成り立つ：

事実 (ド・モルガンの法則 2)**.** (1)　「(すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」は「ある x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値.

(2)　「(ある x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」は「すべての x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値.

例.
- $P =$「**数列** $\{a_n\}$ **が** α **に収束する**」の否定，すなわち「$\{a_n\}$ が α に収束しない」ことの言い換えを与えよう．定義 4.2 から P は

任意の正の数 ε に対して

$$\Bigl[\text{ある自然数 } N \text{ が存在して} \Bigl(\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } \{n \geqq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon\}\Bigr)\Bigr]$$

[19] ド・モルガンの法則：de Morgan's laws; ド・モルガン：Augustus de Morgan, 1806–1871,
[20] 真：true; 偽：false.
[21] P かつ Q：P and Q; P または Q：P or Q; P でない：not P; P ならば Q：P implies Q.

であるから，順番にド・モルガンの法則を適用して，「P でない」は

ある正の数 ε に対して

$$\left[\text{任意の自然数 } N \text{ に対して} \left(\text{ある自然数 } n \text{ が存在して} \left\{n \geqq N \text{ かつ } |a_n-\alpha| \geqq \varepsilon\right\}\right)\right]$$

となる．これをもう少し書き換えると「$\{a_n\}$ が α に収束しない」とは

「次をみたす正の数 ε が存在する：任意の番号 N に対して $n \geqq N$ かつ $|a_n-\alpha| \geqq \varepsilon$ となる n をとることができる.」

- 同様に「$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ でない」は

  「次をみたす正数 ε が存在する：任意の正の数 δ に対して $0 < |x-a| < \delta$ かつ $|f(x)-\alpha| \geqq \varepsilon$ となる x がとれる.」 ♢

問　題　IV

IV-1 実数 r に対して $\{r^n\}$ で与えられる数列に対して次を示しなさい：

(1) $r > 1$ なら正の無限大に発散する.

(2) $r = 1$ なら 1 に収束する.

(3) $-1 < r < 1$ なら 0 に収束する.

(4) $r \leqq -1$ なら発散するが，正負いずれの無限大にも発散しない.

IV-2 二項定理（問題 I-10）を用いて

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &\geqq 1 + \sqrt{2}\sqrt{n} + (n-1) \geqq n.\end{aligned}$$

を示すことにより，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示しなさい.

IV-3 項が 0 から 9 までの整数である数列 $\{p_n\}$ に対して

$$a_n := p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} = \sum_{k=0}^{n} p_k 10^{-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とすると $\{a_n\}$ は収束することを示しなさい．この極限値が，十進小数 $p_0.p_1p_2p_3\dots$ が表す実数である.

IV-4 実数 s に対して，数列 $\{n^s\}$ は (1) $s > 0$ ならば正の無限大に発散する．(2) $s = 0$ ならば 1 に収束する．(3) $s < 0$ ならば 0 に収束する．このことを示しなさい.

IV-5 次で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを，定理 4.21 を用いて示しなさい：

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

通常これを e の定義とする.

IV-6 区間 I から a を抜いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f, g が，$x \to a$ のときに α, β に収束しているとする．このとき

$$f(x)+g(x) \to \alpha+\beta, \qquad f(x)g(x) \to \alpha\beta, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ．ただし，最後の式では $\beta \neq 0$ とする．このことを，定理 4.21 と，数列の極限に関する補題 4.5 を用いて示しなさい.

IV-7 正の実数 α と c に対して関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ c & (x = 0) \end{cases}$$

と定めるとき，

(1) f が 0 で連続であるための条件は何か.

(2) f が 0 で微分可能であるための条件は何か.

(3) 導関数 f' が 0 で連続であるための条件は何か.

IV-8 正の実数 α と正の整数 n に対して，$c^n = \alpha$ となる正の実数 c がただ一つ存在する．このことを，中間値の定理 4.26 を用いて示しなさい.
この c を α **の（正の）**n **乗根**という.

IV-9 関数 f は区間 $[a,b]$ で連続，かつ単調増加であるとし，$Y := [f(a), f(b)]$ とする．このとき，

(1) 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ をみたす $x \in [a,b]$ がただ一つ存在することを示しなさい.

(2) 上の状況で，$y \in f(I)$ は任意にとれるから，

$$\boldsymbol{R} \supset Y \ni y \longmapsto \text{“}f(x) = y \text{ をみたす } x\text{”} \in \boldsymbol{R}$$

により新しい関数が定義される．この関数を f の**逆関数**とよび f^{-1} と書く．連続関数 f の逆関数 f^{-1} は $f(I)$ で連続であることを示しなさい.

IV-10 定理 4.25 の証明の最後の行「$f(\gamma) = \eta = \sup Y$ ならば f は γ で最大値をとる」ことを証明しなさい.