V. 級数

V.1　級数

■ **収束・発散**　数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して

(5.1) $$a_0+a_1+a_2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

の**形**を**級数**または**無限級数**という [1]．級数 (5.1) に対して

(5.2) $$s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0+a_1+\cdots+a_n \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

によって新たな数列 $\{s_n\}$（部分和）を定義する [2]．

定義 5.1. 級数 (5.1) が**収束する**とは，式 (5.2) で与えられる数列 $\{s_n\}$ が収束することである．このとき，$\{s_n\}$ の極限値 c を級数 (5.1) の**和**とよび，

$$c=a_0+a_1+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

と表す [3]．収束しない級数は**発散する**という．

定理 5.2. 級数 (5.1) が収束するならば，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．

証明． 一般に，収束する数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $q_n=p_{n+1}$ $(n=0,1,2,\dots)$ で定まる数列 $\{q_n\}$ は同じ極限値に収束する（問題 V-2）．

式 (5.2) の $\{s_n\}$ と $\{t_n=s_{n+1}\}$ はどちらも級数の和 c に収束するので，

$$0=c-c=\lim_{n\to\infty}t_n-\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(t_n-s_n)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n. \qquad \square$$

定理 5.2 の対偶をとれば

系 5.3. 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない [4] ならば級数 (5.1) は発散する．

*) 2018 年 1 月 15 日/1 月 19 日

1) 級数：a series; 無限級数：an infinite series; 式 (5.1) は一般に数を表すのではなく，a_j を記号 “+” でつないで並べた “絵” とみなす．

2) 式 (5.2) の右辺は有限個の和なので，s_n はひとつの数である．

3) すなわち，(5.1) は，収束するときに限り，一つの数を表すことになる．

4) このことは $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ とは異なる．第 IV 節の補足参照．

例 5.4. 定理 5.2 の逆は成立しない．実際，次の例がある [5]：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \text{であるが} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad \text{は発散する．}$$

このことを確かめよう．部分和を $s_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく．正の整数 m に対して $n\geqq 2^m-1$ をみたす番号 n を任意にとると，

$$s_n\geqq s_{2^m-1}=\sum_{k=1}^{2^m-1}\frac{1}{k}=\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1}\frac{1}{k}\right)$$
$$\geqq\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1}\frac{1}{2^l}\right)=\sum_{l=1}^{m}\frac{2^{l-1}}{2^l}=\frac{m}{2}.$$

番号 m は任意にとれるので，とくに $\{s_n\}$ は正の無限大に発散する（定義 4.3 の条件をみたすことは各自確かめよ）．この級数を**調和級数**という [6]．◇

例 5.5. 実数 r に対して初項 1，公比 r の**等比級数**は $|r|<1$ のとき収束し，

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r} \qquad (|r|<1 \text{ のとき})$$

となり，それ以外の場合は発散する．実際，問題 IV-1 より $|r|\geqq 1$ なら $\{r^n\}$ は 0 に収束しないので，系 5.3 より考えている級数は発散する．一方，$|r|<1$ のときは問題 IV-1 を用いて次を得る：

$$\sum_{k=0}^{n}r^k=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\to\frac{1}{1-r} \qquad (n\to\infty). \qquad \diamondsuit$$

■ **正項級数**　数列 $\{a_n\}$ の各項が $a_n\geqq 0$ をみたすとき，級数 (5.1) は**正項級数**とよばれる [7]．正項級数の部分和は単調非減少数列だから，上に有界なら収束し（実数の連続性公理と同値な定理 4.12），上に有界でないなら正の無限大に発散する．このことから，次の収束判定法が得られる：

5) 式 (5.1) では添字が 0 から始まっているが，この例では添字が 1 から始まる．問題の性質によって添字の番号の付け方が異なるが，適切に読み替えて欲しい．

6) 調和級数：the harmonic progression; 等比級数：a geometric progression（幾何級数）; 等差級数：an arithmetic progression（算術級数）．

7) 正項級数：a nonnegative-term series; 言葉の意味からは “非負項級数” というべきだが，習慣的に正項級数とよぶ．

命題 5.6 (正項級数の比較). 負でない実数からなる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が各 n に対して $a_n \leqq b_n$ をみたしているとする．このとき

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する．

証明. 部分和をそれぞれ

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$$

とおくとこれらは単調非減少数列で，仮定より $s_n \leqq t_n$（$n = 0, 1, 2, \dots$）が成り立つ．

(1): $\sum b_n$ の和を β とすると，各 n に対して $t_n \leqq \beta$ なので，$s_n \leqq t_n \leqq \beta$ となる．この右辺は n に関係ない定数だから $\{s_n\}$ は上に有界．したがって s_n は収束する．

(2): $\sum a_n$ が発散するなら $\{s_n\}$ は正の無限大に発散するから，補題 4.6 より $\{t_n\}$ も正の無限大に発散する． □

注意 5.7. 級数の有限個の項を入れかえても収束・発散という性質は不変である [8]．したがって命題 5.6 の仮定は,「ある番号 N から先の番号 n に対して $a_n \leqq b_n$」とおきかえてもよい．さらに，有限個の項は負でも構わない．

例 5.8. 実数 p に対して，次の級数を考える：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p = 1 + 2^p + 3^p + \dots. \tag{5.3}$$

(1) $p \geqq -1$ ならば (5.3) は発散する．

(2) $p < -1$ ならば (5.3) は収束する [9]．

このことを示そう．番号 n を一つ固定するとき，$f(x) = n^x$ は x の単調増加関数であることに注意する．

(1): $p \geqq -1$ ならば，$n^p \geqq n^{-1} = 1/n$ なので，例 5.4 と命題 5.6 (2) から (5.3) は発散する．

[8] 和の値は変わる．

[9] 収束することは示すことができるが，和を求めるのは別問題である．たとえば $p = -2$ の場合，$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ となるが，これはオイラーによって 1735 年に求められたといわれている．このような "値を求める" 問題は単なる練習問題でないことが多い．Leonhard Euler, 1707–1783, Sz.

(2) ($p \leqq -2$ の場合): このとき，$n \geqq 2$ に対して

$$n^p \leqq n^{-2} = \frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

ここで

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

は 1 に収束するので，命題 5.6 の (1) から (5.3) は収束する [10]

(2) ($-2 < p < -1$ の場合): $p = -1 - q$ ($q \in (0, 1)$) とおくと，$n \geqq 2$ で

$$(n-1)^{p+1} - n^{p+1} = \frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^q}\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q - 1\right)$$

である．いま，テイラーの定理 1.19 から，ある $\theta \in (0, 1)$ に対して

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q &= 1 + \frac{q}{n-1} + \frac{q(q-1)}{2(n-1)^2}\left(1 + \frac{\theta}{n-1}\right)^{q-2} \\ &\geqq 1 + \frac{q}{n-1} - \frac{q(1-q)}{2(n-1)^2} = 1 + \frac{q}{n-1}\left(1 - \frac{1-q}{2(n-1)}\right) \\ &\geqq 1 + \frac{q}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \geqq 1 + \frac{q}{2(n-1)} \geqq 1 + \frac{q}{2n}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $0 < q < 1$, $n \geqq 2$ を用いた．したがって

$$n^p \leqq \frac{2}{q}\left((n-1)^{p+1} - n^{p+1}\right) \qquad (n \geqq 2)$$

であるが，$p < 0$ に注意すれば

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{q}\left((k-1)^{p+1} - k^{p+1}\right) = \frac{2}{q}\left(1 - n^{p+1}\right) \to \frac{2}{q} \qquad (n \to \infty)$$

となるので，命題 5.6 の (1) から (5.3) は収束する． ◇

■ **交代級数** 項がひとつおきに符号を変えるような級数を**交代級数** [11] という．

[10] ここで，比較する数列 $1/(n(n-1))$ は $n \geqq 2$ でしか定義されていないが，級数の収束には最初の有限個の項の挙動は関わりないので $n \geqq 2$ の部分の収束を論じれば十分である（注意 5.7 参照）．

[11] 交代級数：an alternating series.

定理 5.9 (交代級数の和). 単調非増加で 0 に収束する数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $a_n = (-1)^n q_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくと級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n = q_0 - q_1 + q_2 - q_3 + \dots$$

は収束する.

証明. ある番号 n で $q_n = 0$ ならば，そこから先の項はすべて 0 なので，すべての番号 n に対して $q_n > 0$ となる場合のみを考えればよい.

部分和 $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$ を考え，正の整数 j に対して $a_j := s_{2j-1}$, $b_j := s_{2j}$ とおくと，

$$b_j - a_j = s_{2j} - s_{2j-1} = (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} > 0$$
$$a_{j+1} - a_j = s_{2j+1} - s_{2j-1} = (-1)^{2j+1} q_{2j+1} + (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} - q_{2j+1} \geqq 0$$
$$b_{j+1} - b_j = s_{2j+2} - s_{2j} = q_{2j+2} - q_{2j+1} \leqq 0,$$

とくに $a_n < b_n \leqq b_{n-1} \leqq \dots \leqq b_1$ なので $\{a_n\}$ は上に有界な単調非減少数列なので，定理 4.12 からある実数 α に収束する. 一方 $\{b_n\}$ は下に有界な単調非増加数列なので，同様に実数 β に収束する. ここで

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} q_{2n} = 0$$

なので $\alpha = \beta$. [12] すなわち，任意の正の数 ε に対して番号 N_0 で

$$j \geqq N_0 \quad \text{ならば} \quad |a_j - \alpha| = |s_{2j-1} - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_j - \alpha| = |s_{2j} - \alpha| < \varepsilon$$

となるものが存在する. そこで $N = 2N_0 - 1$ とすれば「$n \geqq N$ ならば $|s_n - \alpha| < \varepsilon$」となり $\{s_n\}$ が α に収束することがわかる. □

例 5.10. (1) 次の級数は収束する：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

とくに，例 2.11 (2.13) の $x = 1$ の場合なので，和は $\log 2$ である.

(2) 次の級数は収束する（問題 V-4 V-4(3)）：

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \left(= \frac{\pi}{4}\right).$$

[12] このように，入れ子になっている区間の列 $\{[a_n, b_n]\}$ で 1 つの実数をはさむ議論を**ワイエルストラスの区間縮小法**とよぶことがある.

(3) 級数

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

は収束する. 第 VI 回で示すようにこの和は

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + 3\log 2). \qquad \diamondsuit$$

V.2 絶対収束・条件収束

■（準備）上極限・下極限. 一般に数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次のようにおく：

$$A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \{a_k \mid k \geqq n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{5.4}$$

$$a_n^+ := \sup A_n, \qquad a_n^- := \inf A_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{5.5}$$

補題 5.11. (1) $\{a_n\}$ が上に非有界なら，$a_n^+ = +\infty$（$n = 0, 1, 2, \dots$）.

(2) $\{a_n\}$ が上に有界ならば，$\{a_n^+\}$ は各項が実数の単調非増加数列.

(3) さらに数列 $\{a_n\}$ が下に有界，すなわち $\{a_n\}$ が有界ならば，$\{a_n^+\}$ は下に有界な単調非増加数列.

証明. (1): 番号 n を固定すると，$\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ は有限集合だから上に有界. ここで A_n が上に有界ならば，数列全体が上に有界になってしまうので A_n は上に非有界. したがって $a_n^+ = +\infty$.

(2): $\{a_n\}$ が上に有界ならば，A_n も上に有界だから，上限 a_n^+ が存在する. さらに $A_n \supset A_{n+1}$ だから a_n^+ は A_{n+1} の上界となるので $a_{n+1}^+ \leqq a_n^+$ が成り立つ.

(3): さらに $\{a_n\}$ が下に有界ならば，その下限を α とすると $\alpha \leqq a_n$ が各 n に対して成り立つので，$a_n^+ \geqq \alpha$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$，すなわち $\{a_n^+\}$ は下に有界. □

同様の性質が $\{a_n^-\}$ に対しても成り立つ.

定義 5.12. 数列 $\{a_n\}$ が上に（下に）有界であるとき (5.5) の数列 $\{a_n^+\}$ ($\{a_n^-\}$) は収束するか $-\infty$（$+\infty$）に発散する（定理 4.12）. そこで

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^+, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^-$$

と定め，それぞれ $\{a_n\}$ の**上極限**，**下極限** とよぶ [13].

[13] 上極限：the limit superior; 下極限：the limit inferior. $\limsup$ を $\overline{\lim}$，$\liminf$ を $\underline{\lim}$ と表すこともある.

例 5.13. (1) 数列 $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ の上極限は 1，下極限は -1 である．

(2) 数列 $\{-n\}$ の上極限と下極限はともに $-\infty$ である． ♢

補題 5.14. 実数 α が数列 $\{a_n\}$ の上極限であるための必要十分条件は，

(1) 任意の正の数 ε に対して次をみたす番号 N が存在する：$n \geqq N$ なる任意の n に対して $a_n < \alpha + \varepsilon$.

(2) 任意の正の数 ε と任意の番号 N に対して $m \geqq N$ かつ $\alpha - \varepsilon < a_m$ をみたす番号 m が存在する．

証明．必要性： 式 (5.5) の $\{a_n^+\}$ は単調非増加で，その極限は α だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して「$n \geqq N$ ならば $a_n^+ - \alpha < \varepsilon$」が成り立つような N が存在する．とくに $0 \leqq a_N^+ < \alpha + \varepsilon$ であるが，$n \geqq N$ のとき $a_n \leqq \sup A_N = a_N^+$ なので (1) が成り立つ．
一方，正の数 ε と番号 N を任意にとると，$a_N^+ = \sup A_N$ だから，$a_N^+ - \varepsilon \leqq x$ となる $x \in A_N$ が存在する（補題 4.8）．ここで A_N は (5.4) で定義されているから $x = a_m$ $(m \geqq N)$ となる m が存在するので，(2) が成り立つ．
十分性： α が (1), (2) をみたすならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，「$m \geqq N$ ならば $0 \leqq a_m^+ - \alpha < \varepsilon/2$」となる番号 N が存在する．この N に対して $n \geqq N$ をみたす n を任意にとる．$a_n^+ = \sup A_n$ だから，補題 4.8 から $a_n^+ - \varepsilon/2 < a_m$ $(m \geqq n)$ をみたす番号 m が存在するので，$a_n^+ - \frac{\varepsilon}{2} < a_m \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, すなわち $a_n^+ - \alpha < \varepsilon$ を得る．一方，この n に対して (2) から $\alpha - \varepsilon < a_m$ $(m \geqq n)$ となる m が存在する．ここで $a_m \in A_n$ だから $a_m \leqq \sup A_n = a_n^+$．ゆえに $\alpha - \varepsilon < a_m \leqq a_n^+$ すなわち $\alpha - a_n^+ < \varepsilon$ となるので，$|a_n^+ - \alpha| < \varepsilon$．正数 ε は任意，$n \geqq N$ も任意だから，$a_n^+ \to \alpha$. □

補題 5.15. 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，その上極限と下極限が一致することで，そのとき，極限値は上下極限の値と一致する．

証明．必要性： 数列 $\{a_n\}$ の上極限を α，極限を β として，$\beta = \alpha$ を示す．正数 ε に対して，番号 N を「$n \geqq N$ ならば $a_n \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$，$|a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$」となるようにとる．このとき，$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - \beta \leqq \alpha - \beta + \frac{\varepsilon}{2}$ だから $-\varepsilon < \alpha - \beta$．また，この ε, N に対して $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_m$ となる $m \geqq N$ が存在するので，$\alpha - \beta - \frac{\varepsilon}{2} < a_m - \beta < \frac{\varepsilon}{2}$ だから $\alpha - \beta < \varepsilon$．したがって $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ が任意の正の数 ε に対して成り立つ．とくに $\varepsilon = 1/m$ (m は正の整数) として $m \to \infty$ とすれば $\alpha = \beta$ が得られる．同様に下極限も β と一致する．
十分性： 上極限と下極限が一致したとして，その値を α とすると，補題 5.14 (1) とそれを下極限に書き換えたものを用いれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次をみたす番号 N の存在がわかる：「任意の番号 $n \geqq N$ に対して $a_n \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leqq a_n$ が成り立つ」．この N に対して $n \geqq N$ なら $|a_n - \alpha| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ なので $\{a_n\}$ は α に収束する． □

命題 5.16. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$, $\limsup_{n\to\infty} b_n = \beta$ をみたすならば，$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$.

証明． 数列 $\{a_n b_n\}$ に対して $\alpha\beta$ が補題 5.14 の条件 (1), (2) をみたすことを示す．
(1): 与えられた正の数 ε に対して，$\varepsilon' = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(\alpha+|\beta|)}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$ とおく．このとき，

- $a_n \to \alpha$ から，「$n \geqq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon'$」をみたす番号 N_1 が存在する．
- $\beta = \limsup_{n\to\infty} b_n$ だから，補題 5.14 の (1) から「$n \geqq N_2$ ならば $b_n < \beta + \varepsilon'$」をみたす番号 N_2 が存在する．

そこで $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば $n \geqq N$ なる n に対して

$$a_n b_n < (\alpha + \varepsilon')(\beta + \varepsilon') \leqq \alpha\beta + (\alpha + |\beta|)\varepsilon' + \varepsilon'^2 \leqq \alpha\beta + \varepsilon.$$

(2): 与えられた正の数 ε に対して $\varepsilon'' = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4\alpha}, \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, \alpha\right\}$ とおくと，「$n \geqq N_3$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon''$」をみたす番号 N_3 が存在する．いま，番号 N を任意にとると，補題 5.14 の (2) から，$m \geqq \max\{N, N_3\}$ をみたす番号 m で $\beta - \varepsilon'' < b_m$ となるものが存在する．このとき $\alpha\beta - \varepsilon < a_m b_m$ を示せば良い．実際，$\alpha > 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} a_m b_m - \alpha\beta + \varepsilon &\geqq a_m(\beta - \varepsilon'') - \alpha\beta + \varepsilon \geqq (a_m - \alpha)\beta - a_m\varepsilon'' + \varepsilon \\ &\geqq -|a_m - \alpha|\,|\beta| - (\alpha + \varepsilon'')\varepsilon'' + \varepsilon'' \geqq -\varepsilon''|\beta| - 2\alpha\varepsilon'' + \varepsilon > 0. \end{aligned}$$ □

■ **（準備）コーシーの収束条件．** 絶対収束する級数の性質を調べるために，実数の連続性（公理 4.10，定理 4.12）のもう一つの表現を与える：

定義 5.17. 数列 $\{p_n\}$ が**コーシー列**[14] であるとは，任意の正の数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：

$$m, n \geqq N \text{ をみたす任意の番号 } m, n \text{ に対して } |p_m - p_n| < \varepsilon.$$

補題 5.18. 収束する数列はコーシー列である．

証明． 数列 $\{p_n\}$ の極限値を p とする．任意の正の数 ε に対して「$n \geqq N$ ならば $|p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$」となる番号 N が取れる．すると，$m, n \geqq N$ に対して

$$|p_m - p_n| = |(p_m - p) - (p_n - p)| \leqq |p_m - p| + |p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ □

[14] コーシー列：a Cauchy sequence.

補題 5.19. コーシー列は上・下に有界である．

証明． コーシー列 $\{p_n\}$ をとると（定義 5.17 で $\varepsilon = 1$ として）「$m, n \geqq N$ ならば $|p_m - p_n| < 1$」となる番号 N が存在する．とくに $m = N$ として「$n \geqq N$ ならば $|p_n - p_N| < 1$」が成り立つ．したがって，任意の k に対して

$$|p_k| \leqq M \qquad (M = \max\{|p_0|, |p_1|, \dots, |p_{N-1}|, |p_N| + 1\}). \qquad \square$$

定理 5.20 (コーシーの収束条件). コーシー列は収束する．

注意 5.21. 定理 5.20 は実数の連続性の一つの表現である．実際，すべての項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものが存在する（問題 V-7）.

定理 5.20 の証明． 数列 $\{p_n\}$ がコーシー列ならば，補題 5.19 より有界なので，上極限・下極限が存在する．そこで $\alpha_- := \liminf_{n\to\infty} p_n$, $\alpha_+ := \limsup_{n\to\infty} p_n$ とおく．

コーシー列の定義から，任意の正の整数 k に対して「$m, n \geqq N_1$ ならば $|p_m - p_n| < 1/(3k)$」をみたす番号 N_1 が存在する．

また，α_+ は上極限なので補題 5.14 から,「$n \geqq N_2$ なら $p_n < \alpha_+ + 1/(3k)$」となる N_2 が存在し，さらに「$m \geqq N_2$ かつ $\alpha_+ - 1/(3k) < p_m$」となる m が存在する．

同様に，α_- は下極限だから,「$n \geqq N_3$ なら $p_n > \alpha_- - 1/(3k)$」が成り立つような N_3 が存在し，さらに「$m' \geqq N_3$ かつ $\alpha_- + 1/(3k) > p_{m'}$」となる m' が存在する．

そこで $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とおくと，$m, m' \geqq N$ をみたす番号 m, m' で

$$\alpha_+ - \frac{1}{3k} < p_m < \alpha_+ + \frac{1}{3k}, \qquad \alpha_- - \frac{1}{3k} < p_{m'} < \alpha_- + \frac{1}{3k}$$

となる存在する．$|p_m - p_{m'}| < 1/(3k)$ だったので，$|\alpha_+ - \alpha_-| < \frac{1}{k}$ となるが，k は任意なので $\alpha_+ = \alpha_-$ を得る．このことと補題 5.15 から $\{p_n\}$ は収束する． $\square$

系 5.22. 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意の正の数 ε に対して，次のような番号 N が存在することである：

$$n \geqq N \text{ なる任意の番号 } n \text{ と任意の正の整数 } m \text{ に対して} \quad \left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon.$$

証明． これは部分和 (5.2) からなる数列がコーシー列となることと同値である． $\square$

■ 絶対収束

定義 5.23. 級数の各項に絶対値をつけることによって得られる級数を与えられた級数の**絶対値級数**とよぼう：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{の絶対値級数は} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{である．}$$

級数の絶対値級数が収束するとき，もとの級数は**絶対収束**する [15] という．

定理 5.24. 絶対収束する級数は収束する．

証明． 級数 $\sum |a_n|$ が収束するならば，系 5.22 から，次をみたす番号 N が存在する：

$$n \geqq N \quad \text{ならば，任意の正の整数 } m \text{ に対して} \quad \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

この N に対して $n \geqq N$ とすると,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| \leqq \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

であるから，系 5.22 から $\sum a_n$ も収束する． $\square$

注意 5.25. 級数 $\sum a_n$ が絶対収束するならば，$|\sum a_n| \leqq \sum |a_n|$ が成り立つが，右辺の和がわかったとしても左辺の値がわかるとは限らない．

系 5.26. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が，ある番号 N 以降の項に対して

$$|a_n| \leqq b_n \qquad (n \geqq N)$$

をみたしているとする．このとき，級数 $\sum b_n$ が収束するならば級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．とくに，この級数は収束する．

証明． 級数 $\sum |a_n|$ は正項級数だから，命題 5.6 より結論が得られる． $\square$

例 5.27. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leqq cr^n$（c，r は正の定数で $0 < r < 1$）ならば，級数 $\sum a_n$ は絶対収束する（例 5.5 参照）. ◇

例 5.28. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leqq cn^p$（$c > 0$，$p < -1$）ならば，級数 $\sum a_n$ は絶対収束する（例 5.8 参照）. ◇

[15] 絶対収束：absolute convergence; 絶対収束する：to converge absolutely. 絶対収束性の定義にはもとの級数が収束することは含まれていないが定理 5.24 から，絶対収束性は収束性を導く．

上極限を用いて正項級数の収束判定条件を与えよう．これは，第 VI 回の冪級数の収束半径の議論で重要となる：

定理 5.29. 数列 $\{a_n\}$ に対して $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおくと

(1) $\alpha < 1$ なら級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

(2) $\alpha > 1$ なら級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明． まず $0 \leqq \alpha < 1$ として，二つの正の数 $\varepsilon := (1-\alpha)/20$, $r := \frac{1+\alpha}{2} < 1$ をとると，上極限の条件（補題 5.14 (1)）から「$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \alpha + \varepsilon = r$」となる N が存在する．このとき $|a_n| \leqq r^n$ だから，例 5.27 により $\sum a_n$ は絶対収束．

一方，$\alpha > 1$ のとき，$\varepsilon = (\alpha-1)/2 > 0$, $r = (1+\alpha)/2 > 1$ とすると，任意の番号 N に対して $n \geqq N$ かつ $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon = r$ となる n が存在する．このとき $|a_n| > 1$ だから，$\{a_n\}$ は 0 に収束しないので，定理 5.2 から $\sum a_n$ は発散する． □

注意 5.30. 定理 5.29 で $\alpha = 1$ の場合は判定できない．実際，例 5.8 の級数はすべて $\alpha = 1$ となるが，収束する場合も発散する場合もある．

級数のすべての項が 0 でないときは問題 V-8 のような収束判定条件もある．

■ **条件収束**　収束するが絶対収束しない級数は**条件収束**する [16] という．

例 5.31. 例 5.10 の級数の収束は条件収束である． ◇

注意 5.32. 絶対収束する級数の和は，だいたい有限の和と同じように扱ってよい．一方，条件収束する級数は複雑な挙動を示す．たとえば

- 絶対収束する級数は，その項を任意に入れかえても同じ和に収束する．
- 条件収束する級数は，項の順番をうまく入れ替えることによって，任意の値に収束させることができる．

証明は難しくないが，ここでは深入りしない．

[16] 条件収束：conditional convergence; 条件収束する：to converge conditionally.

問　題　V

V-1　次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

(1)　級数 $\sum a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば級数 $\sum a_n$ は収束する．

V-2　数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が c に収束するとき，$q_n = p_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ で定まる $\{q_n\}$ も c に収束することを，定義 4.2 を直接使って示しなさい．

V-3　例 5.8 の事実を，部分和を積分と比較することにより示しなさい．

V-4　次の級数の和を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　（ヒント：有理化）

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$　（ヒント：$\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.）

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$　（ヒント：例 2.11 に倣って $\tan^{-1} x$ のテイラー級数を求める.）

V-5　実数 r に対して $a_n = nr^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおく．

(1)　$|r| < 1$ のとき $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示しなさい．
ヒント：$|r| = 1/(1+h)$ $(h > 0)$ とおいて $(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$.

(2)　$|r| \geqq 1$ のとき $\{a_n\}$ は発散することを示しなさい．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めなさい．（ヒント：まず部分和を求めよ.）

V-6　次の級数の収束，発散を調べなさい．

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}.$$

V-7　すべての項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものを挙げなさい．

V-8　数列 $\{a_n\}$ のすべての項が 0 ではなく，極限値 $\alpha = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ が存在するとき，(1) $\alpha < 1$ ならば級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．(2) $\alpha > 1$ ならば級数 $\sum a_n$ は発散する．このことを示しなさい．$\alpha = 1$ の場合はどうか．

V-9　次の級数は $|r| < 1$ のとき絶対収束，$|r| > 1$ のとき発散することを確かめなさい：

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$. ただし p は任意の実数．

(2)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} r^n$. ただし α は任意の実数．