VI. 冪級数

与えられた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と文字 x に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{6.1}$$

の形の級数を x に関する**冪級数**（べき）という [1]．級数 (6.1) がある範囲 I の x の値に対して収束するならば，これは I 上で定義された関数を表す：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in I = \{x \in \boldsymbol{R} \mid (6.1) \text{ は収束 }\}. \tag{6.2}$$

第 II 回のテイラー級数は，与えられた関数を冪級数で表すことができる例である．とくに $|x|$ が小さいとき，(6.2) の f は右辺の最初の数項で近似される．

テイラー級数 (2.14) のように $f(a+h)$ を h の冪級数で表すことができれば，f の a の近くの挙動を調べられる．とくに $x=a+h$ とおけば，(2.14) は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

の形に書ける．この式の右辺のような形を a **を中心とする冪級数**ということがある．ここでは，簡単のため 0 を中心とする冪級数 (6.1) を扱う．

VI.1　収束半径

命題 6.1. 冪級数 (6.1) が

(1)　$x=r$ に対して収束するならば，$|x|<|r|$ をみたす任意の x に対して (6.1) は**絶対収束**する．

(2)　$x=r$ に対して発散するならば，$|x|>|r|$ をみたす任意の x に対して (6.1) は発散する．

*) 2016 年 2 月 6 日/2 月 9 日

1) 冪級数：a power series,「巾級数」は嘘字．

証明． (1)：定理 5.2 から $a_n r^n$ は 0 に収束するので，番号 N で「$n \geqq N$ ならば $|a_n r^n| < 1$」となるものが存在する．すると，$n \geqq N$ なる n に対して

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \left|\frac{x^n}{r^n}\right| \leqq \rho^n \qquad \left(\rho := \left|\frac{x}{r}\right| < 1\right)$$

なので，例 5.27 から $\sum a_n x^n$ は絶対収束する．

(2)：もし $|x|>|r|$ をみたす x に対して収束するならば，(1) から $x=r$ で収束することになり，仮定に反する．□

ここで，(6.1) に対して

$$r := \sup C, \qquad C := \left\{ |x| \mid \text{級数 (6.1) は収束する} \right\} \tag{6.3}$$

とおくと，$r \geqq 0$ または $r=+\infty$ となる．この r を冪級数 (6.1) の**収束半径**という [2]．

命題 6.2. 冪級数 (6.1) の収束半径が r であるための必要十分条件は，次が成立することである：

(i)　$|x|<r$ ならば (6.1) は収束する（このとき，命題 6.1 から収束は自動的に絶対収束である）．

(ii)　$|x|>r$ ならば (6.1) は発散する．

とくに $r=+\infty$ であることと，任意の実数 x に対して (6.1) が絶対収束することは同値である．また $r=0$ であることと任意の $x \neq 0$ に対して (6.1) が発散することは同値である．

証明．必要性： 式 (6.3) のように C, r をとるとき，

(i)：$|x|<r$ のとき，$\frac{1}{2}(r-|x|)=\varepsilon>0$ とおくと，上限の性質（補題 4.8 の (2)）から $r-\varepsilon<s$ をみたす $s \in C$ が存在する．とくに s で (6.1) は収束するが，$|x| = r-2\varepsilon < s$ なので命題 6.1 から (6.1) は絶対収束する．

(ii)：$|x|>r$ をみたす x で (6.1) が収束するならば，命題 6.1 から $(|x|+r)/2\ (>r)$ でも収束するが，これは r の定義に反する．

十分性： 実数 r が (i), (ii) をみたすとき，(ii) から r は C の上界となる．さらに (i) から r より小さい数は C の上界でない．したがって $r=\sup C$．□

冪級数の収束半径は次のように求められる：

2) 収束半径：the radius of convergence.

定理 6.3 (コーシー・アダマールの定理 [3])**.** 冪級数 (6.1) の収束半径 r は

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

で与えられる．

証明. 各 n に対して $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|}$ なので

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r}.$$

したがって定理 5.29 から（$\alpha = |x|/r$ として）結論が得られる． □

定理 6.4 (ダランベールの定理 [4])**.** 冪級数 (6.1) に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

が存在するならば r が収束半径である．

証明. 問題 V-8 を用いれば定理 6.3 と同様. □

注意 6.5. コーシー・アダマールの定理 6.3 は任意の冪級数の収束半径を与える公式だが，ダランベールの定理では収束半径が求まらないことがある．実際，$a_n = 0$ となる n が無限個ある級数に対して定理 6.4 は適用できない．

例 6.6. 次の冪級数の収束半径は 1 である：

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

実際，この級数は公比 $-x$ の等比級数だから，$|x| < 1$ のとき収束，$|x| > 1$ のときは発散する．

コーシー・アダマールの定理 6.3 を適用して次のように求めることもできる：この級数は (6.1) の $a_n = (-1)^n$ の場合だが，

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1.$$

[3] Cauchy, Augustin Louis, 1789–1857; Hadamard, Jacques Salomon, 1865–1963.
[4] d'Alembert, Jean Le Rond; 1717–1783.

また，ダランベールの定理 6.4 を用いれば

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

この場合はもちろん

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \qquad (|x| < 1)$$

である． ♢

例 6.7. 次の冪級数の収束半径は $+\infty$ である：

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{6.4}$$

実際，ダランベールの定理 6.4 を用いれば，収束半径が ∞ となることがわかる．とくにこの級数の和は e^x となる（例 2.9）． ♢

例 6.8. (1) 冪級数 $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ の収束半径は 0.

(2) 多項式 $p(t)$ に対して，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ の収束半径は 1 である．

(3) 多項式 $p(t)$, $q(t)$ に対して冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} x^n$ の収束半径は 1 である．ただし $q(n)$ は負でない整数の根をもたないものとする． ♢

例 6.9. 冪級数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{6.5}$$

$$\left(a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{n} & (n = 2m+1; m \text{ は負でない整数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \right)$$

の収束半径を求めよう．

無限個の a_n が 0 になるので，ダランベールの定理 6.4 は直接使えない．コーシー・アダマールの定理 6.3 を使う：

$$b_n^+ := \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geqq n\} = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \,\middle|\, k \geqq n, k \text{ は奇数}\right\}$$

とすると，問題 IV-2 から

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} b_n^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

となるので，収束半径は 1 である．

ダランベールの定理 6.4 を用いて次のように収束半径を求めることもできる：s に関する冪級数

$$1 - \frac{1}{3}s + \frac{1}{5}s^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m s^m}{2m+1}$$

の収束半径は定理 6.4 から 1 なので，この級数は $|s| < 1$ なら絶対収束，$|s| > 1$ なら発散．いまこの級数の s を x^2 で置き換え，x をかければ，(6.5) が得られるので，これは $|x| < 1$ で絶対収束，$|x| > 1$ で発散する．すなわち収束半径は 1 となる（命題 6.2）． ♢

例 6.10. 冪級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

の収束半径はともに $+\infty$ である．とくにこれらの和はそれぞれ $\sin x$, $\cos x$ となる（例 2.10）． ♢

収束半径が r の冪級数 (6.1) の $x = \pm r$ での挙動にはさまざまな場合がある．

例 6.11 (問題 VI-3)**.** (1) 冪級数 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ の収束半径は 1 であり，$x = \pm 1$ で発散する．

(2) 冪級数 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ の収束半径は 1 であり $|x| < 1$ で絶対収束し，$|x| > 1$ では発散する．さらに $x = 1$ で $\log 2$ に収束（条件収束）する（例 2.11）が，$x = -1$ では発散する（例 5.8）．

(3) 例 6.9 の級数の収束半径は 1 で，$x = \pm 1$ では $\frac{\pi}{4}$ に条件収束する．

(4) 冪級数 $1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ の収束半径は 1 であり，$x = \pm 1$ で絶対収束する（例 5.8）． ♢

VI.2 冪級数が定める関数

命題 6.1 から冪級数 (6.1) が収束する範囲 I は区間となり，(6.2) は区間 I 上の関数 f を定める．とくに，冪級数の部分和から定まる関数 f_n を用いて f を次のように表しておく：

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in I); \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{6.6}$$

補題 6.12. 式 (6.6) の状況で，冪級数の収束半径 r が正であるとする．このとき区間 $(-r, r)$ に含まれる任意の閉区間 J に対して次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_J |f_n - f| = 0.$$

証明. 閉区間 $J := [a, b] \subset (-r, r)$ に対して，$\delta := \frac{1}{2}\min\{r - b, a - r\} > 0$ とすると，$J \subset [-r + 2\delta, r - 2\delta]$ となる．関数の J での上限は J' での上限を超えないから，$J = [-r + 2\delta, r - 2\delta]$ で結論を示せばよい．あたえられた級数は $x = r - \delta$ で絶対収束するから，$|a_n(r-\delta)^n| \to 0$ $(n \to \infty)$．したがって，「$n \geqq N$ ならば $|a_n(r-\delta)^n| \leqq 1$」となる番号 N がとれる．このとき，$n \geqq N$ ならば，各 $x \in J$ に対して

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k (r-\delta)^k| \left|\frac{x}{r-\delta}\right|^k \\ &\leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{x}{r-\delta}\right|^k \leqq \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho} \qquad \left(\rho := \frac{|x|}{r-\delta} < 1\right)\end{aligned}$$

となる．したがって $\sup_J |f_n - f| \to 0$ $(n \to \infty)$. □

定理 6.13. 収束半径 r が正である冪級数が (6.2) で定める関数 f は，区間 $(-r, r)$ で連続である．

証明． 点 $\alpha \in (-r,r)$ をひとつ固定して，$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ を示せばよい．まず $d := \frac{1}{2}\min\{r-\alpha, \alpha+r\} > 0$ とすると，α は $(-r+d, r-d)$ に含まれている．いま，閉区間 $J := [-r+d, r-d]$ を固定しておく．

正の数 ε を任意にとると，補題 6.12 より，次をみたす番号 N が存在する：

$$n \geqq N \qquad \text{ならば} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqq \sup_J |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (x \in J).$$

この N に対して部分和 f_N は多項式だから連続関数．したがって，

$$|x-\alpha| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad |f_N(x) - f_N(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

をみたす正の数 δ が存在する．この δ に対して $|x-\alpha| < \delta$ なら

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\alpha)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(\alpha) + f_N(\alpha) - f(\alpha)| \\ &\leqq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\alpha)| + |f_N(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon \end{aligned}$$

したがって f は α で連続である． □

例 6.11 の (2), (3), (4) のように，収束半径 r の冪級数が $(-r,r)$ の端点で収束する場合もあるが，定理 6.13 は端点での連続性について言及していない．実際，ここでの証明では $\alpha = \pm r$ の場合には有効でない．しかし，端点で冪級数が収束するならば，冪級数が定める関数の連続性が言える：

定理 6.14 (アーベルの連続性定理[5])**．** 冪級数 (6.2) の収束半径が r で，$x = r$ $(x = -r)$ で (6.2) が収束するならば，次が成り立つ：

$$\lim_{x\to r-0} f(x) = f(r) \ \left(\lim_{x\to -r+0} f(x) = f(-r)\right), \quad \text{ただし } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

証明は節末に与える．

■ **項別微分・積分**　定理 6.13 から，冪級数 (6.6) で定まる関数 f は $(-r,r)$ で連続なので，積分可能である．

定理 6.15 (項別積分[6])**．** 収束半径が $r\ (>0)$ の冪級数で (6.2) のように定義される関数 f と任意の $x\ (-r < x < r)$ に対して次が成り立つ：

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

[5] Abel, Niels Henrik; 1802–1829.

証明． 式 (6.6) のように部分和 f_n をとると，補題 6.12 から

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f_n(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^x \bigl(f(t) - f_n(t)\bigr)\,dt\right| \leqq \left|\int_0^x \bigl|f(t) - f_n(t)\bigr|\,dt\right| \\ &\leqq \left|\int_0^x \sup_{[-x,x]}\bigl|f(t) - f_n(t)\bigr|\,dt\right| \leqq \sup_{[-x,x]}\bigl|f(t) - f_n(t)\bigr|\,|x| \to 0 \qquad (n\to\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$f_n(x)$ は x の多項式だから，積分公式が使えて

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{k}x^k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n. \qquad \square$$

定理 6.16 (項別微分)**．** 収束半径が $r\ (>0)$ の冪級数で (6.6) のように定義される関数 f は $(-r,r)$ で微分可能で，次が成り立つ：

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \quad (-r < x < r). \tag{6.7}$$

証明． 命題 5.16 と問題 IV-2 から

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

なので，コーシー・アダマールの定理 6.3 から (6.7) の右辺の級数の収束半径は r である．そこで，この級数で与えられる関数を g とおくと，定理 6.15 から $x \in (-r,r)$ に対して

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

なので，微分積分学の基本定理より f は微分可能で $f'(x) = g(x)$ $(-r < x < r)$． □

例 6.17． 級数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{6.8}$$

の和を求めよう．まず定理 5.9 から (6.8) は収束することがわかる．

[6] 項別積分（微分）：integration (differentiation) by term and term.

いま，例 6.9 の (6.5) のような冪級数を考えると，その収束半径は 1 である．したがって定理 6.16 から

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

は区間 $(-1, 1)$ で微分可能で

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad (-1 < x < 1).$$

したがって

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} x \qquad (-1 < x < 1)$$

であるが，$x = 1$ で級数 (6.5) は収束するのでアーベルの定理 6.14 から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_{x=1} = \lim_{x\to 1-0} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} \qquad \diamondsuit$$

アーベルの定理の証明

アーベルの連続性定理 6.14 に証明を与えよう．変数 x の冪級数の収束半径が $r\ (>0)$ ならば $x = rt$ と置き換えれば収束半径 1 の冪級数が得られるので，最初から収束半径 r は 1 としておいてよい．また，与えられた収束半径 1 の冪級数が $x = -1 = -r$ で収束するならば，$x = -u$ と置き換えれば $u = 1$ で収束する冪級数が得られるので，次の定理を証明すればよいことになる：

定理 6.18. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で，さらに $x = 1$ とおいた級数が収束するならば，

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = X \quad \text{ただし } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad X := \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

証明. 数列 $\{a_n\}$ の部分和数列を

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

とおく．すると仮定より $\{\sigma_n\}$ は収束するので，有界である（補題 4.4 の (1)）．したがって，$\{\sigma_n - X\}$ も有界だから

$$|\sigma_n - X| \leqq A \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{6.9}$$

をみたす正の数 A が存在する．

正の数 ε が与えられたとする．このとき，$\{\sigma_n\}$ は X に収束するから，番号 M で次を満たすものをとることができる：

$$n \geqq M \qquad \text{ならば} \qquad |\sigma_n - X| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6.10}$$

また，式 (6.9) の A と (6.10) の M に対して

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4(M+1)A} \tag{6.11}$$

とおいておく．

いま，(6.10) の M に対して $N > M + 2$ なる番号 N をとると，$a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ $(n \geqq 1)$ だから，$0 < x < 1$ をみたす x に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= \sigma_0 + \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) x^n = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{N} \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n (x^n - x^{n+1}) + \sigma_N x^N = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=0}^{N-1} X x^n \right) + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + (1-x) X \sum_{n=0}^{N-1} x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + X(1-x) \frac{1-x^N}{1-x} + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right)
\end{aligned}$$

$$+ X + (\sigma_N - X)x^N.$$

したがって，$0 < x < 1$ ならば，(6.9), (6.10), (6.11) を用いて

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - X\right| \\
&\leqq (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M} |\sigma_n - X|x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} |\sigma_n - X|x^n\right) + |\sigma_N - X|x^N \\
&< (1-x)A\sum_{n=0}^{M} x^n + (1-x)\sum_{n=M+1}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4}x^n + \frac{\varepsilon}{4}x^N \\
&\leqq (1-x)A(M+1) + (1-x)\frac{\varepsilon}{4}x^{M+1}\frac{1-x^{N-M-1}}{1-x} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leqq (1-x)\frac{\varepsilon}{4\delta} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

とくに，$N \to \infty$ とすると左辺は $|f(x) - X|$ に収束するので，

$$|f(x) - X| \leqq \frac{\varepsilon}{4}\left(2 + \frac{1-x}{\delta}\right) \qquad (0 < x < 1)$$

が成り立つ．したがって $0 < 1 - x < \delta$ をみたす任意の x に対して

$$|f(x) - X| \leqq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

が得られた．ここで $\varepsilon > 0$ は任意だったから，

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = X$$

である． □

問　題　VI

VI-1　例 6.8 を確かめなさい．

VI-2　例 6.10 を確かめなさい．

VI-3　例 6.11 を確かめなさい．

VI-4　例 6.17 に倣って，級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

の和を求めなさい．

VI-5　例 6.17 に倣って，等式

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + 3\log 2)$$

を示しなさい（例 5.10 (3)）．