

I. 平均値の定理とテイラーの定理

I.1 平均値の定理

復習：連続性と微分可能性 数直線上の区間 I で¹⁾ 定義された（一変数）関数 f が²⁾ 点 $a \in I$ で連続³⁾ であるとは，

$$(1.1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．とくに a が閉区間の左端（右端）のときは，(1.1) の左辺の極限は，右極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ （左極限 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ）とする⁴⁾⁵⁾．さらに，区間 I の各点で連続な関数 f を区間 I で連続な関数， I 上の連続関数， I 上で定義された連続関数などという．

区間 I で定義された関数 f が I 上の点 a で微分可能⁶⁾ であるとは，次の極限值が存在することである：

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

この値を f の a における微分係数といって $f'(a)$ で表す．区間 I の各点で微分可能な関数を 区間 I で微分可能であるという．次の定理が成り立つ⁷⁾．

定理 1.1. 関数 f が a で微分可能なら， f は a で連続である．

証明．二つの関数 F, G が $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \beta$ をみたすならば，

$$\lim_{x \rightarrow a} (F(x) \pm G(x)) = \alpha \pm \beta, \quad \lim_{x \rightarrow a} (F(x)G(x)) = \alpha\beta$$

^{*}) 2017 年 12 月 04 日/08 日 (2017 年 12 月 15 日訂正)

¹⁾ 区間 an interval; 開 (閉) 区間 an open (a closed) interval.

²⁾ 関数 a function.

³⁾ 連続 continuous; 連続関数 a continuous function.

⁴⁾ 極限 limit; 右極限 right-hand limit; 左極限 left-hand limit.

⁵⁾ 極限の定義は第 IV 節で扱う．ここでは「どんどん近づく」という理解でよい．

⁶⁾ 微分可能 differentiable; 微分係数 the differential coefficient; 導関数 the derivative.

⁷⁾ 定理 a theorem; 系 a corollary; 命題 a proposition; 補題 a lemma; 証明 a proof.

が成り立つこと（極限の公式）を用いる⁸⁾．実際，

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \times 0 = 0. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a) + f(a)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) = 0 + f(a) = f(a). \quad \square \end{aligned}$$

注意 1.2. 定理 1.1 の逆は成り立たない．実際，実数全体で定義された二つの連続関数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0), \end{cases} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

は，いずれも 0 で微分可能でない．関数 f のグラフは 0 で角をもつが， g のグラフはなめらかな曲線であることに注意しよう．

区間 I で微分可能な関数 f が与えられたとき， I の各点 x に対して x における f の微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数 $f': I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbf{R}$ を考えることができる．これを f の導関数⁹⁾ という．

例 1.3. 区間 I で微分可能な関数 f の導関数は，連続とは限らない．実際，次の関数を考えよう：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

⁸⁾ これは証明が必要な事実であるが，そのためには極限の定義を明確にする必要がある．第 IV 回で扱う．

⁹⁾ 導関数：derivative.

すると f は微分可能で、その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．とくに $x_n = 1/(2n\pi)$ ($n = 0, 1, \dots$) とすると, $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるが, $f'(x_n) = -\frac{1}{2}$ なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = -\frac{1}{2} \neq f'(0).$$

したがって f' は 0 で連続でない．

◇

平均値の定理 微積分学でもっとも重要な定理の一つが平均値の定理¹⁰⁾である．

定理 1.4 (平均値の定理). 閉区間 $[a, b]$ で定義された (一変数) 連続関数 f が, 開区間 (a, b) では微分可能であるとする．このとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$

をみたく c が少なくとも一つ存在する．

定理 1.4 から次の系がただちに従う：

系 1.5. 一変数関数 f が a と $a+h$ を含む区間で微分可能ならば, 次をみたく θ が少なくとも一つ存在する：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h, \quad 0 < \theta < 1.$$

証明．まず $h = 0$ の場合はどんな θ をとっても結論の式が成り立つ．

次に $h > 0$ の場合, f は $[a, a+h]$ で微分可能であるから, 定理 1.1 よりとくに連続．したがって, 定理 1.4 を $b = a+h$ として適用すると

$$f(a+h) = f(a) + f'(c)h \quad a < c < a+h$$

をみたく c が少なくとも存在する．ここで $\theta = (c-a)/h$ とおけば $a < c < a+h$ から $0 < \theta < 1$ が得られる．

¹⁰⁾平均値の定理: the mean value theorem; 証明は後で与える．

最後に $h < 0$ の場合は, 区間 $[a+h, a]$ に対して平均値の定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(a) - f(a+h)}{a - (a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c) \quad a+h < c < a$$

をみたく c が存在する．ここで $h < 0$ なので $c = a + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) と表される．□

平均値の定理の応用: 関数の近似値

例 1.6. 平方根¹¹⁾ $\sqrt{10}$ の近似値¹²⁾ を求めよう．関数 $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$, $b = 10$ に対して定理 1.4 を適用すると

$$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{10 - 9} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{c}}, \quad \text{かつ} \quad 9 < c < 10$$

をみたく c が存在する．とくに $c > 9$ だから

$$\sqrt{10} < 3 + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{6} < 3.17.$$

一方, $c < 10$ だから, 上の式を用いて

$$\sqrt{10} > 3 + \frac{1}{2\sqrt{10}} > 3 + \frac{1}{2(3 + \frac{1}{6})} = 3 + \frac{3}{19} > 3 + \frac{3}{20} = 3.15.$$

以上から $3.15 < \sqrt{10} < 3.17$ が得られた．とくに $\sqrt{10}$ を 10 進小数¹³⁾ で表したとき, 小数第 1 位は 1, 小数第 2 位は 5 または 6 であることがわかる．◇

平均値の定理の応用: 関数の値の変化

定理 1.7. 区間 I で定義された微分可能な関数が, I 上で $f'(x) = 0$ をみたくしているならば, f は I で定数である．

証明．区間 I 上の点 a をとり固定する．この a と異なる任意の $x \in I$ に対して $f(x) = f(a)$ であることを示せばよい．いま $x > a$ のときは, 区間 $[a, x]$ に平均値の定理 1.4 を適用すると,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c), \quad a < c < x$$

¹¹⁾平方根 the square root.

¹²⁾近似値 an approximation.

¹³⁾10 進小数 a decimal fraction; 小数第一位 the first decimal place.

をみたく c が存在することがわかる。ここで $a, x \in I$ だから $c \in I$ である。したがって仮定から $f'(c) = 0$ なので $f(x) = f(a)$ を得る。一方、 $x < a$ のときは区間 $[x, a]$ に関して同様の議論をすればよい。□

系 1.8. 区間 I で定義された微分可能な関数 F, G がともに連続関数 f の原始関数¹⁴⁾ ならば $G(x) = F(x) + C$ (C は定数) と書ける。

証明. 二つの関数 F, G はともに f の原始関数だから $F'(x) = G'(x) = f(x)$ 。したがって、関数 $H(x) = G(x) - F(x)$ は区間 I 上で $H'(x) = 0$ をみたくすから、定理 1.7 より区間 I 上で定数である。□

よく知っているはずの関数の増減は次のように示される：

定理 1.9. 区間 (a, b) で定義された微分可能な関数 f の導関数が (a, b) で正(負)の値をとるならば、 f は (a, b) で単調増加(減少)である¹⁵⁾。

証明. 区間 (a, b) から二つの数 x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ をみたくすようにとる。このとき、区間 $[x_1, x_2]$ に対して定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad (a < x_1 < c < x_2 < b)$$

をみたく c が存在することがわかる。仮定より $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$) なので、 $x_2 - x_1 > 0$ であることと合わせて

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad (f(x_2) - f(x_1) < 0)$$

が得られる。すなわち $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) が成り立つことがわかるので、 f は単調増加(減少)。□

注意 1.10. 微分可能な関数 f の導関数 f' が連続である¹⁶⁾ とき、 f の定義域の内点 c で¹⁷⁾ $f'(c) > 0$ ならば、 c を含む開区間 I で、 f が I 上で単調増加となるものが存在する。実際、 f' が連続かつ $f'(c) > 0$ ならば c を含む開区間 I で $f'(x) > 0$ が I 上で成り立つものが存在する(この事実は第 IV 節にて説明する)。

¹⁴⁾ 原始関数 a primitive; 定数 a constant.

¹⁵⁾ 単調増加(減少) monotone increasing (decreasing); 正 positive; 負 negative.

¹⁶⁾ すなわち C^1 -級.

¹⁷⁾ すなわち c を含むある開区間が f の定義域に含まれるような点.

例 1.11. 一般に、微分可能な関数 f の定義域の一点 c で $f'(c) > 0$ だからといって、 c を含むある開区間で f が単調増加であるとは限らない。実際、例 1.3 の関数 f は $f'(0) = 1/2 > 0$ をみたくしているが、 0 を含む任意の開区間 I は、 f が単調増加となる区間と単調減少となる区間の両方を含む。◇

さらに、平均値の定理 1.4 から、次がわかる(問題 I-4):

定理 1.12 (積分の平均値の定理). 区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f に対して、次をみたく c が存在する：

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c), \quad a < c < b.$$

平均値の定理の証明 平均値の定理 1.4 を示すには、次の連続関数の性質(第 IV 節で言及する。ここでは証明を与えない)を用いる：

定理 1.13 (最大・最小値の定理). 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f は、区間 $[a, b]$ で最大値・最小値をもつ。

ここで、区間 I 上の関数 f が $c \in I$ で最大値(最小値)をとる¹⁸⁾ とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$) が成り立つことである。関数 f が区間 I で最大値(最小値)をとるとは、上のような $c \in I$ が存在することである。区間 I の点 c が I の内点¹⁹⁾ であるとは、 c を含む開区間で I に含まれるものが存在することをいう。たとえば閉区間 $I = [a, b]$ に対して $c \in (a, b)$ は I の内点であるが、 a, b は I の内点ではない。

補題 1.14. 区間 I で定義された関数 f が I の内点 c で最大値または最小値をとるとする。さらに f が c で微分可能ならば $f'(c) = 0$ が成り立つ。

証明. 点 c は I の内点だから十分小さい正の数 δ をとれば、開区間 $(c - \delta, c + \delta)$ は I に含まれる。いま f は c で微分可能だから、極限值

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

¹⁸⁾ 最大値 the maximum; 最小値 the minimum.

¹⁹⁾ 内点 an interior point

が存在する．とくに f が c で最大値 (最小値) をとるならば, $|h| < \delta$ をみたま任意の h に対して $f(c+h) - f(c) \leq 0$ (≥ 0) なので

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0 & (\geq 0) & (0 < h < \delta \text{ のとき}) \\ \geq 0 & (\leq 0) & (-\delta < h < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので, h を 0 に近づけた時の極限值 $f'(c)$ は 0 でなければならない. \square

補題 1.15 (ロル²⁰⁾ の定理). 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 F が开区間 (a, b) で微分可能, かつ $F(a) = F(b)$ をみたしているならば,

$$F'(c) = 0, \quad a < c < b$$

をみたま c が少なくとも一つ存在する.

証明. 関数 F は $[a, b]$ で連続だから, 定理 1.13 から $c_1, c_2 \in [a, b]$ で F は c_1 で最大値をとり, c_2 で最小値をとるようなものが存在する. もし c_1, c_2 がともに a, b いずれかの値をとるならば, 仮定から $F(c_1) = F(c_2)$ となって, 最大値と最小値が一致する. このとき F は定数関数となるので, 区間 (a, b) で $F' = 0$ となり結論が得られる. そうでない場合は c_1, c_2 の少なくとも一方が开区間 (a, b) に含まれるので, それを c とおけば補題 1.14 より $F'(c) = 0$. \square

平均値の定理 1.4 の証明. 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

に対してロルの定理 (補題 1.15) を適用すればよい²¹⁾. \square

定理 1.16 (コーシー²²⁾ の平均値の定理). 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f, g がともに (a, b) で微分可能, $g(a) \neq g(b)$ をみたまし, 区間 (a, b) 上で $g'(x) \neq 0$ であるとき, 次をみたま c が少なくともひとつ存在する:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

²⁰⁾ Michel Rolle (1652-1719; Fr); ロルの定理 Rolle's theorem.

²¹⁾ 教科書に「すればよい」と書いてあったら本当に適用して証明を書き下ろしてみるべきである.

²²⁾ Augustin Louis Cauchy (1789-1857, Fr); これに対して, 平均値の定理 1.4 をラグランジュの平均値の定理といふことがある; Joseph-Louis Lagrange (1736-1813, It).

証明. 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

に対してロルの定理 (補題 1.15) を適用すればよい. \square

I.2 テイラーの定理

高階の導関数 区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能であるとき, f は 2 階 (2 回) 微分可能である, といい, f' の導関数 f'' を f の 2 次導関数²³⁾ という. 一般に正の整数 $k \geq 2$ に対して, k 階微分可能性, k 次導関数が次のように帰納的に定義される:

区間 I で定義された関数 f が $(k-1)$ 階微分可能であり, $(k-1)$ 次導関数が微分可能であるとき, f は k 階微分可能であるといひ, $(k-1)$ 次導関数の導関数を k 次導関数とよぶ.

関数 f の k 次導関数を次のように書く:

$$f^{(k)}(x), \quad \frac{d^k}{dx^k} f(x), \quad \frac{d^k y}{dx^k}.$$

最後の表記は $y = f(x)$ のように従属変数を y と表す.

例 1.17. (1) 正の整数 n に対して $f(x) = x^n$ とすると, $f^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)x^{n-k}$ である. とくに $k > n$ ならば $f^{(k)}(x) = 0$ である.

(2) $f(x) = e^x$ ならば, 任意の負でない整数 k に対して $f^{(k)}(x) = e^x$.

(3) $f(x) = \cos x$ ならば, 任意の負でない整数 k に対して $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$ である. とくに, 負でない整数 m に対して $f^{(m)}(x) = \cos(x + \frac{m\pi}{2})$ である. \diamond

定義 1.18. • 区間 I 上の関数 f が I で連続であるとき, f は C^0 -級であるといふ.

²³⁾ 2 次導関数 the second derivative; k 次導関数 the k -th derivative.

- 区間 I で定義された微分可能な関数 f の導関数が連続であるとき f は 1 階連続微分可能または C^1 -級であるという .
- 区間 I で定義された k 階微分可能な関数 f の k 次導関数が連続であるとき f は k 階連続微分可能または C^k -級であるという .
- 任意の正の整数 k に対して C^k -級であるような関数を C^∞ -級という .

テイラーの定理

定理 1.19 (テイラー²⁴⁾ の定理). 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば, $a+h \in I$ となる h に対して

$$(1.2) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h) \\ = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h), \\ R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

をみたす θ が少なくともひとつ存在する²⁵⁾ .

証明 . 区間 $[0, 1]$ で定義された関数²⁶⁾

$$F(t) := \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^k \right) \\ + (1-t)^{n+1} \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right)$$

は微分可能で $F(0) = F(1) = f(a+h)$ をみたしている . これにロルの定理 (補題 1.15) を適用すればよい (問題 I-9) . \square

²⁴⁾ Sir Brook Taylor (1685–1731, En)

²⁵⁾ 式 (1.2) の総和記号の $j=0$ の項において h^0 は $h=0$ のときも 1 であると約束しておく .

²⁶⁾ 記号 “:=” は「左辺を右辺によって定義する」ということを表す .

例 1.20. 再び $\sqrt{10}$ の近似値を求めよう . 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ に $a=9$, $h=1$, $n=1$ としてテイラーの定理 1.19 を適用すると ,

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{9+\theta^3}}, \quad 0 < \theta < 1$$

をみたす θ が存在することがわかる . とくに, $\theta \in (0, 1)$ だから

$$\sqrt{10} < 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{10^3}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{10}} \\ \leq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{16}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{320} \\ \leq 3 + \frac{1}{6} - \frac{3}{1000} = 3 + \frac{1}{6} - 0.003 \leq 3.16366 \dots \leq 3.164 \\ \sqrt{10} > 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{9^3}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8 \times 27} \\ \geq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8 \times 25} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{200} = 3 + \frac{1}{6} - 0.005 \geq 3.161$$

となるので

$$3.161 < \sqrt{10} < 3.164$$

が成り立つ . とくに $\sqrt{10} = 3.16\dots$ (小数第二位まで正しい) . この場合, テイラーの定理 1.19 の次数 n を 3, 4, … とあげていくと, 近似の精度がよくなる (問題 I-12) . \diamond

テイラーの定理 1.19 は次のように書くこともできる :

系 1.21 (テイラーの定理). 関数 f が a, b を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば ,

$$(1.3) \quad f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \cdots \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + R_{n+1}, \\ R_{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

をみたす a と b の間の数 c が存在する .

問 題 I

- I-1 平均値の定理を用いて $\sqrt{5}$ の近似値が 2.2 (小数第一位の数字は 2) であることを示しなさい。同様に, $\sin 0.1, \tan 0.1$ の近似値を求めなさい (0.1 radian は何度くらいか?)。
- I-2 工太郎君は, 午前 10 時に東名高速道路の東京 IC (東京都世田谷区) を自動車で通過し, 346.8km 先の小牧 IC (愛知県小牧市) に同じ日の午後 1 時についた。彼がスピード違反をした瞬間が存在することを証明しなさい (注: 日本の高速道路の制限スピードは, 時速 110km を超えることはない。)
- I-3 定理 1.1 の証明の中の等式変形の一つひとつの等号が成り立つ理由を考えなさい。
- I-4 定理 1.12 を証明しなさい。(ヒント: 微積分の基本定理を用いる。)
- I-5 定理 1.13 の仮定が必要であることを, 次のようにして示しなさい:

- 開区間 $(0, 1)$ で定義された連続関数で, 最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい。
- 開区間 $(0, 1)$ で定義された連続関数で, 最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい。
- 閉区間 $[0, 1]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で, 最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい。

- I-6 平均値の定理の証明 (7 ページ) を完成させなさい。同様に, コーシーの平均値の定理 1.16 の証明を完成させなさい。
- I-7 コーシーの平均値の定理を用いて, 次のロピタル²⁷⁾ の定理の特別な場合を示しなさい:

関数 $f(x), g(x)$ が区間 $[a, a+h]$ で連続, $(a, a+h)$ で微分可能, かつ $g'(x) \neq 0$ ($a < x < a+h$) が成り立っているとする。さらに $f(a) = g(a) = 0$ のとき,

$$\text{極限值 } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在するならば } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ も存在}$$

して, 両者は等しい。

- I-8 次の極限値を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{5^x - 3^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{5^x - 3^x}{x^2}.$$

- I-9 テイラーの定理 1.19 の証明を完成させなさい。

- I-10 任意の実数 α と負でない整数 k に対して

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

で定まる $\binom{\alpha}{k}$ を二項係数²⁸⁾ という。任意の正の整数 n に対して

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k$$

が成り立つことを示しなさい (ヒント: 次の事実を用いる。「 n 多項式 $f(x)$ の次数が n 以下であることがわかっているとき, $f^{(k)}(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$) が成り立つなら $f(x)$ は恒等的に 0 である。」)

- I-11 次の場合に, 式 (1.2) を具体的に書きなさい。

- $f(x) = \sqrt{x}, a = 1, n = 2$.
- $f(x) = e^x, a = 0, n = 2; n$ は一般の自然数。
- $f(x) = e^x, a$ は一般の実数, n は一般の自然数。
- $f(x) = \cos x, a = 0, n = 2; n = 2k - 1$ (k は正の整数)。
- $f(x) = \sin x, a = 0, n = 3; n = 2k$ (k は正の整数)。
- $f(x) = \tan x, a = 0, n = 3$.
- $f(x) = \tan^{-1} x, a = 0, n = 4$.
- $f(x) = \log(1+x), a = 0, n = 3; n$ は一般の自然数。
- $f(x) = (1+x)^\alpha, a = 0, n = 3; n$ は一般の自然数。ただし α は実数。

- I-12 例 1.20 の n を 3 にして $\sqrt{10}$ の近似値を求めなさい。小数第何位まで求めるか。

- I-13 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよう。

- 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ に $a = 1, h = 0.1, n = 2$ としてテイラーの定理 1.19 を書きなさい。
- このとき, $R_3(h)$ 以外の項の総和はいくつか。
- $R_3(h)$ の大きさを不等式で評価することによって, $\sqrt{1.1}$ の値を求めなさい。
- 同じことを $n = 3$ として試みなさい。

²⁷⁾Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661–1704, Fr; l'Hospital と書かれる。

²⁸⁾二項係数: binomial coefficients.

II. テイラーの定理の応用

II.1 テイラーの定理と極限

テイラーの定理 1.19 における $R_{n+1}(h)$ を剰余項¹⁾, それ以外の部分を主要項という. 例 1.20, 問題 I-12, I-13 でみたように, ある状況では剰余項の値が十分小さいことが期待される. このことをある意味で述べたのが次である: 定理 2.1 (テイラーの定理 2). 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1} -級とする. このとき, 次が成り立つ:

$$(2.1) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$$

とおくと $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0.$

注意 2.2. 定理 1.19 では h は与えられた定数であったが, 定理 2.1 の h は 0 に近い値をとる変数で, $h \rightarrow 0$ という極限における性質が定理の結論である.

定理 2.1 の証明. 関数 f は開区間 $I := (a - \delta, a + \delta)$ ($\delta > 0$) で C^{n+1} -級であるとしてよい. このとき $|h| < \delta$ をみたま h に対して $a + h \in I$ である.

仮定から f は I で C^{n+1} -級だから, $f^{(n+1)}$ は I 上で連続である (定義 1.18 参照). したがって, 定理 1.13 より $f^{(n+1)}$ は I に含まれる閉区間 $I' := [a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}]$ 上で最大値 m_1 , 最小値 m_2 をとる. そこで $M := \max\{|m_1|, |m_2|\}$ とする²⁾. ここでテイラーの定理 1.19 から, 各 $h \in I'$ に対して

$$R_{n+1}(h) := f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta_h h)$$

をみたま θ_h ($0 < \theta_h < 1$) が存在する. いま $a + \theta_h h \in I'$ であるから,

$$|R_{n+1}(h)| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} M, \quad \text{したがって} \quad \left| \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} \right| \leq \frac{M|h|}{(n+1)!}$$

が成り立つので,

$$-\frac{M|h|}{(n+1)!} \leq \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} \leq \frac{M|h|}{(n+1)!}.$$

この右辺と左辺は $h \rightarrow 0$ としたときに 0 となるから, 結論が得られた. □

^{*)} 2017 年 12 月 11 日/15 日

¹⁾ 剰余: remainder; 主要項: the principal terms

²⁾ 記号 $\max\{a, b\}$ は a と b のうち小さい方を表す.

例 2.3. 極限值

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a - bx}{x^2}$$

が存在するような定数 a, b の値を求めよう. テイラーの定理 2.1 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = x$, $n = 2$ として適用すると

$$(**) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + R_3(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(x)}{x^2} = 0$$

を得る. したがって

$$\frac{e^x - a - bx}{x^2} = \frac{1-a}{x^2} + \frac{1-b}{x} + \frac{1}{2} + \frac{R_3(x)}{x^2}$$

となる. この右辺の最後の項は (***) から $x \rightarrow 0$ のとき 0 に近づくので, 極限值が存在するためには

$$X := \frac{1-a}{x^2} + \frac{1-b}{x} = \frac{1}{x^2}(1-a+x(1-b))$$

が $x \rightarrow 0$ で収束しなければならない. いま $a \neq 1$ とすると, $|X| \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 0$) となるので, 極限が存在するためには $a = 1$. このとき $X = (1-b)/x$ だから,

これが収束するためには $b = 1$ でなければならない. 以上から, 極限值 (*) が存在するためには $a = b = 1$ でなければならない. そのとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{R_3(x)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}. \quad \diamond$$

収束の次数とランダウの記号 剰余項の性質を表すために記号を用意する:

記号 2.4. 関数 f, g が

$$(2.2) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

をみたまとき,

$$(2.3) \quad f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$$

と書き, o をランダウの (小文字の) o 記号³⁾⁴⁾ という. とくに $g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$) のとき, (2.2) は, $f(x)$ が $g(x)$ よりもはやく 0 に近づくことを意味している. このとき, (2.3) を

³⁾ Edmund Gerorg Hermann Landau; 1877–1938, De.

⁴⁾ ランダウの記号: Landau's symbol; ランダウの記号にはもうひとつ, o と異なる意味をもつ “大文字の O 記号” がある.

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ より速いオーダー⁵⁾ で 0 に近づく

と読むことがある。

また, $f(x) - g(x) = o(h(x))$ ($x \rightarrow a$) のとき, 次のように書く:

$$(2.4) \quad f(x) = g(x) + o(h(x)) \quad (x \rightarrow a).$$

例 2.5 (問題 II-4). • 定数関数 1 に対して $f(x) = o(1)$ ($x \rightarrow a$) であることは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ であることと同値である。

- 整数 m, n に対して $x^m = o(x^n)$ ($x \rightarrow 0$) であるための必要十分条件は $m > n$ が成り立つことである。
- $\cos x = 1 + o(x)$ ($x \rightarrow 0$). ◇

注意 2.6. 式 $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) はあくまでも (2.2) の略記でしかなく, 記号 $o(g(x))$ 自体が特別な関数を表しているわけではない。実際,

$$x^2 = o(x), \quad x^3 = o(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

は正しい式だが, これらを引き算して得られる “ $x^2 - x^3 = 0$ ” は正しくない。

ランダウの記号を用いると, 定理 2.1 は次のように書き換えられる:

系 2.7. 関数 $f(x)$ が a を含む開区間で C^{n+1} -級であるとき,

$$(2.5) \quad f(a+h) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k \right) + o(h^n) \quad (h \rightarrow 0).$$

テイラーの定理の別証明と積分型剰余項 剰余項の表し方にはさまざまなものがあるが, ここではもうひとつの表示を紹介しておく:

定理 2.8 (テイラーの定理 3). 関数 f が a を含む開区間 I で $n+1$ 階微分可能ならば, $a+h \in I$ となる h に対して, テイラーの定理 1.19 の剰余項 $R_{n+1}(h)$ は次のように表される:

$$(2.6) \quad R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+uh) du.$$

⁵⁾オーダー (次数): order

証明. $x = a+h$ において, 微積分の基本定理と部分積分の公式を用いると,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x (t-x)' f'(t) dt \\ &= [(t-x)f'(t)]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x)f''(t) dt \\ &= f'(a)(x-a) - \int_a^x \left(\frac{1}{2}(t-x)^2 \right)' f''(t) dt \\ &= f'(a)(x-a) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t) dt \\ &= f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \left(\frac{(t-x)^3}{6} \right)' f'''(t) dt \\ &= \dots \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \right) + \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

ここで, $t = (1-u)a + ux$ において置換積分を行うと,

$$\begin{aligned} R_{n+1}(h) &:= \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}((1-u)a + ux) du \quad \square \end{aligned}$$

II.2 テイラー級数

テイラーの定理の剰余項の挙動 定理 2.1 は, テイラーの定理の剰余項の $h \rightarrow 0$ としたときの挙動であった。次に, h を固定し, n を大きくしたときの剰余項のふるまいを調べよう。

例 2.9. 関数 $f(x) = e^x$ に対して $a = 0$, $h = x$, n を正の整数として, テイラーの定理 1.19 を適用すると

$$(2.7) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n x} x^{n+1} \quad (0 < \theta_n < 1)$$

をみたく θ_n が存在することがわかる. ここで f は単調増加関数 (問題 II-5) であるから, $0 < \theta_n < 1$ であることに注意すれば

$$e^{\theta_n x} \leq \begin{cases} e^x & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ. とくに $x < 0$ のとき $1 < e^{-x} = e^{|x|}$ だから, 各実数 x に対して

$$|R_{n+1}(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

したがって, 節末の補題 2.21 から, 任意に与えられた実数 x に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$$

が成り立つ. とくに (2.7) で $n \rightarrow \infty$ とすれば, 任意の実数 x に対して等式

$$(2.8) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

が成り立つことがわかる. \diamond

例 2.10 (問題 II-6). 任意の実数 x に対して

$$(2.9) \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},$$

$$(2.10) \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \quad \diamond$$

例 2.11. 関数 $f(x) = \log(1+x)$ ($-1 < x \leq 1$) に対して, テイラーの定理 1.19 を $a = 0$, $h = x$ として適用する. 正の整数 k に対して $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ であることに注意すれば, テイラーの定理 1.19 から

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_{n+1},$$

$$R_{n+1} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

をみたく θ が存在することがわかる. もし $0 \leq x \leq 1$ ならば

$$(2.11) \quad |R_{n+1}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

一方, $-1 < x < 0$ のときは, 定理 2.8 の形の剰余項を用いれば, $h := -x$ ($0 < h < 1$) とおいて

$$|R_{n+1}| \leq |x|^{n+1} \left| \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+ux)^{n+1}} du \right| = h^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-uh)^{n+1}} du$$

$$= h^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1-uh} \right)^n \frac{du}{1-uh} = h^{n+1} \int_0^1 \frac{s^n}{1-hs} ds.$$

ここで, 最後の等式は変数変換 $s = (1-u)/(1-uh)$ による. 区間 $0 \leq s \leq 1$ で $1-hs \geq 1-h$ だから, $0 < h < 1$ に注意すれば

$$(2.12) \quad |R_{n+1}| \leq h^{n+1} \int_0^1 \frac{s^n}{1-h} ds$$

$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)(1-h)} \leq \frac{1}{(n+1)(1-h)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. したがって, (2.11) と (2.12) から,

$$(2.13) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad (-1 < x \leq 1)$$

が成り立つ. 等式 (2.13) の左辺は $x > -1$ をみたく任意の x に対して定義されるが, $x > 1$ となる x に対して右辺の級数は意味をもたない. \diamond

テイラー展開 関数 f が a を含む開区間で C^∞ -級 (定義 1.18) であるとき, (1.2) で $R_n(h)$ を定義したとき, ある区間 I のすべての h に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(h) = 0$ が成り立つならば, 各 $h \in I$ に対して

$$(2.14) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k$$

が成り立つ. これを f の a のまわりのテイラー展開⁶⁾ という. とくに (2.14) で $a = 0$ の場合をマクローリン展開⁷⁾ という⁸⁾.

⁶⁾テイラー展開: the Taylor expansion.

⁷⁾マクローリン展開: the Maclaurin expansion; Colin Maclaurin (1698–1746), Scotland.

⁸⁾「テイラーの定理」と「テイラー展開」は区別すること. テイラーの定理 1.19 は $f(a+h)$ を h の有限次の多項式で近似したときの誤差を表現する定理である. 一方, テイラー展開は, $f(a+h)$ を無限級数で「正確に」表すものである.

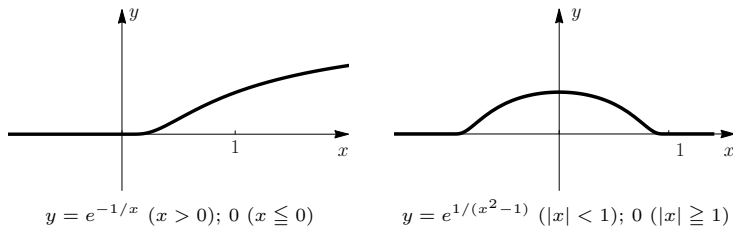


図 2.1 例 2.13.

解析関数 式 (2.8), (2.9), (2.10), (2.13) はそれぞれ e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ の 0 の回りのテイラー展開 (マクローリン展開) を与えている。

定義 2.12. 点 a を含む区間で C^∞ -級な関数 f が a を含む開区間 I で (2.14) のような形で表される, すなわちテイラー展開可能であるとき, f は a で解析的 (正確には実解析的) とよばれる⁹⁾. とくに f が定義域の各点で実解析的であるとき f は単に実解析的, または解析関数という. 実解析的であることを “ C^ω -級” ということがある¹⁰⁾.

定義から解析関数は C^∞ -級であるが, 逆は一般に成立しない。

例 2.13. 実数全体で定義された関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と定める このとき, 節末の補題 2.22 から

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{0}{h} = 0$$

なので補題 2.23 より

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

⁹⁾(実) 解析的: (real) analytic; 複素変数の関数の解析性は別の形で定義されるので, 区別するためは「実」をつけることが多い。

¹⁰⁾解析関数: an analytic function. C^ω -級: of class C-omega.

となる. したがって, 次を得る:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases}$$

ここで再び補題 2.22 から f' は 0 で連続, したがって f は C^1 -級関数である.

実は任意の正の整数 k に対して

$$(2.15) \quad f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と表される. ここで $P_k(t)$ は t の多項式で, 帰納的に

$$P_0(t) = 1, \quad P_{k+1}(t) = t^2(P_k(t) - P_k'(t)) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義されるものである (問題 II-9). したがって f は C^∞ -級であるが, 0 で実解析的でない. 実際, もし 0 で実解析的なら, 十分小さい x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0 \times x^k = 0,$$

ところが, $x > 0$ なら x がいくら小さくても $f(x) > 0$ となり, 矛盾が生じる.

同様に次の関数も C^∞ -級であるが, ± 1 で解析的でない (図 2.1 右):

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 1) \end{cases} \quad \diamond$$

一般化された二項定理

定義 2.14. 実数 α と負でない整数 k に対して

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k > 0), \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

と定め, これを二項係数¹¹⁾ とよぶ.

¹¹⁾二項係数: the binomial coefficient

例 2.15 (問題 II-8).

$$\binom{-1}{0} = 1, \quad \binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = 1, \quad \dots, \quad \binom{-1}{k} = (-1)^k.$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{16}, \quad \dots \quad \diamond$$

注意 2.16. 正の整数 n に対して, $\binom{n}{k}$ は「 n 個から k 個を選ぶ組み合わせの数¹²⁾」である. とくに $k > n$ ならば $\binom{n}{k} = 0$.

補題 2.17. 任意の実数 α と正の整数 k に対して次が成り立つ:

$$\binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k}.$$

証明. 右辺を変形して左辺を導く:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{(k-1)!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{k!} (k + (\alpha-k+1)) \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k+1)}{k!} = \binom{\alpha+1}{k}. \quad \square \end{aligned}$$

補題 2.18. 任意の実数 α と正の整数 n に対して

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

が成り立つ. ただし $o(\cdot)$ はランダウの記号 2.4 である.

証明. 関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ を微分すれば

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

となるので, テイラーの定理の系 2.7 から結論が得られる. \square

¹²⁾ 高等学校の教科書では “ ${}_n C_k$ ” を使うことが多いが, “ $\binom{n}{k}$ ” の方が一般的によく使われるようである. とくに α が正の整数でないときは “ ${}_n C_k$ ” とは書かない.

補題 2.18 から x が十分小さい範囲では, 二項定理 (問題 I-10) に類似の式が近似的に成り立つ. ここで, α が正の整数でなければ, 二項係数は決して 0 にならないので 問題 I-10 のような有限の項からなる等式は期待できない.

補題 2.18 の剰余項をきちんと評価すると¹³⁾ 次がわかる:

定理 2.19 (一般化された二項定理). 任意の実数 α に対して次が成り立つ:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}x^k \quad (-1 < x < 1).$$

例 2.20 (等比級数の和の公式).

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (-1 < x < 1). \quad \diamond$$

II.3 いくつかの補題

この節の議論で用いたいいくつかの事実をまとめておく.

補題 2.21. 任意の正の実数 x に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n/n!) = 0$ が成り立つ.

証明. 正の実数 x に対して $N-1 < x \leq N$ をみたす正の整数 N が存在する. 番号 n が $n > N$ をみたしているとき,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^N}{N!} \frac{x^{n-N}}{n(n-1)\dots(N+1)} \leq \frac{x^N}{N!} \frac{N^{n-N}}{(N+1)^{n-N}} \\ &= \frac{x^N}{N!} \left(\frac{N+1}{N}\right)^N \left(\frac{N}{N+1}\right)^n = C \left(\frac{N}{N+1}\right)^n \quad \left(C := \frac{x^N}{N!} \left(\frac{N+1}{N}\right)^N\right) \end{aligned}$$

となる. $0 < N/(N+1) < 1$ なので $n \rightarrow \infty$ としたとき上の式の右辺は 0 に近づくから, 結論が得られる. \square

補題 2.22. 任意の多項式 $P(x)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0.$$

¹³⁾ ここでは深入りしない.

証明. 多項式 $P(x)$ の次数を N とする. このとき, テイラーの定理 1.19 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = x > 0$, $n = N + 1$ として適用すると,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1} + \frac{e^{\theta x}}{(N+2)!}x^{N+2} \geq \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1}.$$

ただし θ は $0 < \theta < 1$ をみたす数である. とくに

$$P(x) = p_N x^N + p_{N-1} x^{N-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \quad (p_N \neq 0)$$

と書けば, $x > 0$ のときに

$$\left| \frac{P(x)}{e^x} \right| \leq \frac{(N+1)! |P(x)|}{x^{N+1}} = \frac{(N+1)!}{x} \left| p_N + \frac{p_{N-1}}{x} + \cdots + \frac{p_0}{x^N} \right| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

となり, 結論が得られた. \square

補題 2.23. 点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I \setminus \{a\} = \{x \in I \mid x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ をみたしているならば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ である.

問 題 II

II-1 関数 $f(x)$ は x の n 次多項式で与えられているとする. このとき,

(1) 次が成り立つことを示しなさい:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k. \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4$ とするとき $f(\sqrt{2}+2)$, $f(2.1)$ をそれぞれ求めなさい.

(ヒント: 前の問いの式を $a = 2$ の場合を書く.)

II-2 テイラーの定理を用いて次の極限値を求めなさい:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - 3x - x^3}{x^5}.$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1+x) - 2x + x^2}{x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan^3 x}.$

II-3 次の極限値が存在するように, 定数 a, b の値を定めなさい:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x - a \sin x + bx}{x^5}.$$

II-4 例 2.5 を確かめなさい.

II-5 自然対数の底 e が無理数であることを, 以下のように示しなさい.

- (1) 関数 $f(x) = e^x$ は実数全体で単調増加であることを示しなさい.
- (2) 前回のテイラーの定理 1.19 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = 1$, $n = 2$ に対して適用し, $e^\theta < e$ ($0 < \theta < 1$) であることを用いて $2.6 < e < 3$ であることを示しなさい.
- (3) 以下, e は有理数であると仮定して矛盾を導く. $e = m/n$ (m, n は正の整数) とおくと $n \geq 2$ であることを確かめなさい.
- (4) テイラーの定理 1.19 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = 1$ として, 前の問いの n に対して適用した式を書きなさい.
- (5) 前の問いの式の両辺に $n!$ をかけた等式は, テイラーの定理の剰余項に対応する項以外はすべて整数の項からなることを確かめなさい.
- (6) 前の問いで得られた等式の, 剰余項に対応する項は整数にならないことを示しなさい. これは矛盾なので, 背理法が完成した.

II-6 式 (2.9), (2.10) を示しなさい (ヒント: $|\cos X| \leq 1$, $|\sin X| \leq 1$ を用いる.)

II-7 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めなさい.

II-8 例 2.15 を確かめなさい.

II-9 例 2.13 の式 (2.15) を示しなさい (ヒント: 数学的帰納法による.)

III. 極値問題

III.1 一変数関数の極値

一変数関数の最大値・最小値は第 I 節の定理 1.13 ですすでに扱った：

定義 3.1. 一変数関数 f が a で最大値 (最小値)¹⁾ をとるとは、定義域内のすべての x に対して $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) が成り立つことである。

例 3.2. • 関数 $f(x) = x^4$ は $x = 0$ で最小値をとる。

• 次の関数は \mathbf{R} で C^∞ -級で、任意の k に対して $f^{(k)}(0) = 0$ となる：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(第 II 節の例 2.13 参照) . この関数は $x = 0$ で最小値をとる。 ◇

定義 3.3. 一変数関数 f が a で極大値 (極小値)²⁾ をとるとは、次を満たす正の実数 ε が存在することである： f の定義域に含まれ、かつ $0 < |x - a| < \varepsilon$ を満たす任意の x に対して、 $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) が成り立つ。

これは“ a に十分近い x に対して $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) が成り立つ”ことを定量的に述べたものである。

例 3.4. • 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値 (実は最小値) をとる。

• 次の関数 f は $x = 0$ で極小値 (実は最小値) をとる：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

• 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ は $x = -1$ で極大値、 $x = 1$ で極小値をとる。 ◇

極値の判定条件

定理 3.5. 関数 f は $x = a$ を含む開区間で C^∞ -級とする³⁾。

- A. $f(x)$ が $x = a$ で極値 (極大値または極小値) をとるならば、 $f'(a) = 0$ である。
- B. (A の対偶) $f'(a) \neq 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で極大値も極小値もとらない。
- C. $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$) が成り立つならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値 (極大値) をとる。

例 3.6. $f(x) = x^3 - 3x$ の極値を調べよう。 $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ だから $f'(x) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $x = 1$ または $x = -1$ である。したがって定理 3.5 B より、 -1 以外の点では f は極値をとらない。さらに $f''(x) = 6x$ だから、 $f''(1) > 0$, $f''(-1) < 0$ 。したがって定理 3.5 C から $f(x)$ は $x = 1$ で極小値 -2 , $x = -1$ で極大値 2 をとる。 ◇

注意 3.7. • 定理 3.5 A の逆は成立しない。実際 $f(x) = x^3$ は反例。

• 定理 3.5 の C の逆は成立しない。実際、例 3.4 が反例になっている。

定理 3.5 の B が成り立つ理由 (いい加減バージョン): $m = f'(a)$ とおいて、 $m > 0$ の場合を考える。このとき、テイラーの定理 2.1 より、 $m = f'(a)$ に注意して

$$(*) \quad f(a+h) = f(a) + mh + R_2(h) \quad \text{とおけば} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_2(h)}{h} = 0$$

となる。この $R_2(h)$ は h が十分小さければ mh よりもずっと小さいので、十分小さい h の範囲では無視してよい。したがって

$$f(a+h) - f(a) \doteq mh \quad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

である⁴⁾ が、 $m > 0$ だから、この式の右辺は $h > 0$ のとき正、 $h < 0$ のとき負になる。したがって、 h が十分小さいときは

$$f(a+h) > f(a) \quad (h > 0 \text{ のとき}); \quad f(a+h) < f(a) \quad (h < 0 \text{ のとき})$$

³⁾ 記述を煩雑にしないために強い仮定をおいた。実際 A, B は f が a で微分可能であれば成り立つ。また、C は f が 2 回微分可能であれば成り立つ。

⁴⁾ “ \doteq ” は「およそ等しい」

^{*}) 2017 年 12 月 18 日/22 日 (2017 年 1 月 22 日訂正)

¹⁾ 最大値: the maximum; 最小値: the minimum.

²⁾ 極大値: a maximal; a local maxima; 極小値: a minimal; a local minima; 極値: an extremal.

となるので、どんな小さい ε をとっても “ $0 < |h| < \varepsilon$ ならば $f(a+h) > f(a)$ ”, “ $0 < |h| < \varepsilon$ ならば $f(a+h) < f(a)$ ” のいずれも成り立たせることはできない。すなわち f は $x = a$ で極値をとらない。

定理 3.5 の B が成り立つ理由 (ちょっと正確バージョン): $m > 0$ のとき, (*) までは同様。いま $|R_2(h)/(mh)|$ は h を 0 に近づけると 0 に近づくのだから, 正の数 δ をうまくとれば

$$(**) \quad |h| < \delta \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{R_2(h)}{mh} \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つようにできる。 $m > 0$ だから (**) は

$$|h| < \delta \quad \text{ならば} \quad -\frac{1}{2}m|h| < R_2(h) < \frac{1}{2}m|h|$$

と書き換えられる。したがって (*) より

$$|h| < \delta \quad \text{ならば} \quad mh - \frac{1}{2}m|h| < f(a+h) - f(a) < mh + \frac{1}{2}m|h|$$

となる。ここで, $0 < h < \delta$ ならば, $|h| = h$ だから,

$$f(a+h) - f(a) > mh - \frac{1}{2}mh = \frac{1}{2}mh > 0,$$

$0 > h > -\delta$ なら $|h| = -h$ だから

$$f(a+h) - f(a) < mh + \frac{1}{2}m|h| = \frac{1}{2}mh < 0$$

となり, どんな小さい ε をとっても $|h| < \varepsilon$ の範囲で $f(a+h) - f(a)$ は符号を変える。したがって (いい加減バージョンと同じ)。

定理 3.5 の C が成り立つ理由 (いい加減バージョン): $m = f''(a)$ とおいて, $m > 0$ の場合を考える。このとき, テイラーの定理より ($f'(a) = 0, f''(a) = m$ に注意して)

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}mh^2 + R_3(h) \quad \text{とおけば} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_3(h)}{h^2} = 0$$

となる。この $R_3(h)$ は h が十分小さければ $\frac{1}{2}mh^2$ よりもずっと小さいので, 十分小さい h の範囲では無視してよい。したがって

$$f(a+h) - f(a) \doteq \frac{1}{2}mh^2 \quad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

であるが, $m > 0$ だから, この式の右辺は $h \neq 0$ であるかぎり常に正の値をとる。したがって, h が十分小さいときは

$$f(a+h) > f(a)$$

となるので, $f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる。 $m < 0$ の場合も同様である。

III.2 2変数関数の極大値・極小値

多変数関数, とくに 2 変数関数の極値問題を考えたい。まず, 記号・用語の復習からはじめよう:

実数全体の集合を R と書き,

$$R^2 := \{(x, y) \mid x, y \text{ は実数}\} = \{(x, y) \mid x, y \in R\} = \text{「座標平面」}$$

とする。点 $(a, b) \in R^2$ と正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(a, b) = \{(x, y) \in R^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}$$

を点 (a, b) の ε -近傍⁵⁾ という。 R^2 の部分集合 U が開集合であるとは, 任意の $(a, b) \in U$ に対してうまく正の数 ε を選べば $U_\varepsilon(a, b) \subset U$ とできることである。また R^2 の部分集合 U が連結⁶⁾ であるとは, 任意の 2 点 $P, Q \in U$ を U 内の連続曲線で結ぶことができることである。これらの概念を用いて, R^2 の連結な開集合のことを領域⁷⁾ という。

領域 $D \subset R^2$ で定義された関数 f が $(a, b) \in D$ で極大値 (極小値) をとるとは, うまく正の数 ε をとれば, 任意の $(x, y) \in U_\varepsilon(a, b)$ ($(x, y) \neq (a, b)$) に対して $f(x, y) < f(a, b)$ ($f(x, y) > f(a, b)$) が成り立つことである。

⁵⁾ ε -近傍: an ε -neighborhood; 開集合: an open set.

⁶⁾ 連結: connected; ここで述べた定義は正確には弧状連結性 pathwise connectedness を表しているが, R^n の部分集合に対しては連結性と弧状連結性は同値である。

⁷⁾ 領域: a domain.

ここでは, 1 変数関数に対する極値判定条件 (定理 3.5) に相当するような 2 変数関数 (多変数関数) 極値判定条件を与える.

2 変数関数のテイラーの定理 1 変数関数に関する定理 3.5 は, 考えている点の近くでの関数の挙動をテイラーの定理 (定理 1.19, 2.1) の 2 次の項までで近似することにより得られた. 2 変数関数についても同様のことを考える:

定理 3.8 (2 変数関数のテイラーの定理). 2 変数関数 f が $(x, y) = (a, b)$ を含む領域で C^∞ -級であるとする. このとき

$$(3.1) \quad f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \right) + R_3(h, k)$$

と書くと

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_3(h, k)}{h^2 + k^2} = 0$$

が成り立つ.

証明. あたえられた (a, b) および (h, k) に対して, 1 変数関数 $F(t) = f(a+th, b+tk)$ を考えると, F は $[0, 1]$ で C^∞ -級であるから, F にテイラーの定理 1.19 を適用すると,

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{3!}F'''(\theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

となるような θ が存在する. ここで, 合成関数の微分公式 (チェイン・ルール⁸⁾) を用いれば, $F(0) = f(a+0h, b+0k) = f(a, b)$,

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$$

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2$$

$$F'''(\theta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}h^2k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3$$

を得る. ただし, 最後の式の右辺の偏微分は $(a+\theta h, b+\theta k)$ での値である. とくに f は C^∞ -級なので, f の任意の階数の偏導関数は連続である. したがって, 例えば

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b)$$

⁸⁾チェイン・ルール: the chain rule, テキスト, 第 4 章 (定理 4.2.4).

が成り立つ. したがって $(h, k) = (r \cos t, r \sin t)$ ($r > 0$) とおけば $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ すなわち $r \rightarrow 0$ のとき

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k) \frac{h^3}{h^2+k^2} \right) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k) r \cos^3 t \right) \rightarrow 0$$

が成り立つ. $F'''(\theta)$ の他の項も同様に考えれば $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} F'''(\theta)/(h^2+k^2) = 0$ を得る. □

注意 3.9. 定理 3.8 は 2 次式による f の近似とみなすことができる. とくに, (3.1) の h, k に関する 1 次の項までをとれば, 1 次式による近似

$$(3.2) \quad f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + R_2(h, k),$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_2(h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことがわかる.

注意 3.10. テイラーの公式 (3.1) の右辺のうち, h, k の 1 次の項は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = df(a, b)\mathbf{h} \quad \left(\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right)$$

と表される. ただし $df(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$ は (a, b) における f の全微分⁹⁾ である. さらに h, k の 2 次の項の 2 倍は,

$$(3.3) \quad (h, k) \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = {}^t \mathbf{h} \text{Hess } f(a, b)\mathbf{h},$$

$$\text{ただし, } \text{Hess } f(a, b) := \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

と表される. ただし ${}^t \mathbf{h}$ は列ベクトル \mathbf{h} を転置して得られる行ベクトルを表す. ここで, 偏微分の順序交換定理¹⁰⁾ から, $\text{Hess } f(a, b)$ は 2 次の対称行列¹¹⁾ となる. この行列を f の (a, b) におけるヘッセ行列¹²⁾ とよぶ.

⁹⁾全微分: the total differential. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して $df := (f_x, f_y)$ を f の全微分という. とくに, 関数 $\varphi(x, y) = x, \psi(x, y) = y$ の全微分はそれぞれ $(1, 0), (0, 1)$ なので $dx = (1, 0), dy = (0, 1)$ と書ける. これを用いて $df = f_x dx + f_y dy$ と書くこともある.

¹⁰⁾偏微分の順序交換: テキスト 4 節 (定理 4.3.1).

¹¹⁾対称行列: a symmetric matrix.

¹²⁾ヘッセ行列: the Hessian matrix; Hesse, Ludwig Otto, 1811–1874, de.

2 変数関数の極値判定

定理 3.11. R^2 の領域 D で定義された C^∞ -級関数 f が $(a, b) \in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

が成り立つ .

証明 . 関数 f が (a, b) で極小値をとるならば , 次をみたす正の数 ε が存在する : $h^2 + k^2 < \varepsilon^2$ ならば $f(a+h, b+k) > f(a, b)$. とくに $|h| < \varepsilon$ のとき $f(a+h, b) > f(a, b)$ なので $F(h) := f(a+h, b)$ は $h=0$ で極小値をとる . したがって定理 3.5 から $F'(0) = f_x(a, b)$ は 0 である . 同様に $G(k) = f(a, b+k)$ を考えれば $f_y(a, b) = 0$ が成り立つ . \square

定理 3.12. R^2 の領域 D で定義された C^∞ -級関数 f が $(a, b) \in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

をみたしているとする . このとき ,

$$\Delta := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2 = \det \text{Hess } f(a, b),$$

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$$

とおくと ,

- $\Delta > 0$ かつ $A > 0$ ならば $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で極小値をとる .
- $\Delta > 0$ かつ $A < 0$ ならば $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で極大値をとる .
- $\Delta < 0$ ならば $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で極値をとらない .

これを示すために次の補題を用いる :

補題 3.13. h と k の斉次 2 次式

$$(**) \quad \varphi(h, k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \quad (A, B, C \text{ は定数})$$

に対して

- 任意の $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して $\varphi(h, k) > 0$ となるための必要十分条件は $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である .
- 任意の $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して $\varphi(h, k) < 0$ となるための必要十分条件は $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である .
- φ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC - B^2 < 0$ となることである .
- それ以外 ($AC - B^2 = 0$) の場合は , φ は符号を変えないが , $\varphi = 0$ となるような $(h, k) \neq (0, 0)$ が存在する .

証明 . 2 次式の平方完成

$$\varphi(h, k) = \begin{cases} A \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}k^2 & (A \neq 0) \\ C \left(k + \frac{B}{C}h \right)^2 + \frac{AC-B^2}{C}h^2 & (C \neq 0) \\ 2Bhk & (A = C = 0) \end{cases}$$

からわかる . \square

定理 3.12 の証明 (いい加減バージョン) . 定理 3.8 と仮定から

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\varphi(h, k) + R_3(h, k), \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_3(h, k)}{h^2 + k^2} = 0$$

が成り立つ . ただし $A := f_{xx}(a, b)$, $B := f_{xy}(a, b)$, $C := f_{yy}(a, b)$ に対して

$$\varphi(h, k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

とおいた . $h^2 + k^2$ が十分小さいときは $|R_3(h, k)|$ は $|\varphi(h, k)|$ に比べて小さいので $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ は $\frac{1}{2}\varphi(h, k)$ で近似されるので , 補題 3.13 から結論が得られる . \square

III.3 三変数以上の場合

一般に R^n の領域 D で定義された C^∞ -級関数 f をベクトル $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ に実数 $f(x)$ を対応させているとみなしておく . このとき , 定理 3.8 の証明の真似をすれば ,

$$(3.4) \quad f(a+h) = f(a) + df(a)h + \frac{1}{2}{}^t h \text{Hess } f(a)h + R_3(h),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_3(h)}{|h|^2} = 0$$

を得る．ただし

$$df(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right),$$

$$\text{Hess } f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

このとき，

事実 3.14. • f が \mathbf{a} で極値をとるならば $df(\mathbf{a}) = 0$ である．

- $df(\mathbf{a}) = 0$ かつ $\text{Hess } f(\mathbf{a})$ の固有値がすべて正 (負) ならば f は \mathbf{a} で極小値 (極大値) をとる．
- $df(\mathbf{a}) = 0$ かつ $\text{Hess } f(\mathbf{a})$ の固有値が符号を変えるならば f は \mathbf{a} で極値をとらない．

この事実の後半の 2 つは，次に述べる 2 次形式の性質からわかる：

実数の変数 (x_1, \dots, x_n) の斉次 2 次式を (n 変数の) 2 次形式という．2 次形式は

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

の形で表される．とくに $x_i x_j = x_j x_i$ であるから， a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように係数を按分することができる．すなわち 2 次形式の一般形は

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

これを，列ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ と対称行列 $A = (a_{ij})$ を用いて

$$(3.5) \quad \varphi(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} \quad (A \text{ は実対称行列})$$

と表すことができる．行列 A を 2 次形式 φ の表現行列という．

事実 3.15 (線形代数の復習). • 実数を成分とする対称行列の固有値は実数である．

- 実数を成分とする対称行列 A は直交行列により対角化できる．

すなわち，実数を成分とする対称行列 A に対して，直交行列 P が存在して

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \quad ({}^t P P = E = \text{単位行列})$$

とできる．ただし μ_1, \dots, μ_n は A の固有値である．このことを用い，変数変換

$$\mathbf{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n) := {}^t P \mathbf{x}$$

を行うと，2 次形式 (3.5) は

$$\varphi = \mu_1 X_1^2 + \dots + \mu_n X_n^2$$

と書くことができる．とくに

- μ_1, \dots, μ_n がすべて正ならば，任意の 0 でないベクトル \mathbf{x} に対して $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ が成立する．このとき 2 次形式 (3.5) は正値または正定値という．
- μ_1, \dots, μ_n がすべて負ならば，任意の 0 でないベクトル \mathbf{x} に対して $\varphi(\mathbf{x}) < 0$ が成立する．このとき 2 次形式 (3.5) は負値または負定値という．
- μ_1, \dots, μ_n の中に正のものも負のものも含まれているならば， $\varphi(\mathbf{x})$ は正，負いずれの値もとる．

問 題 III

- III-1 (1) 関数 $f(x) = x^4$ が $x = 0$ で最小値をとることを証明しなさい (例 3.2) .
 (2) C^∞ -級関数 f の $x = a$ における (1 次, 2 次 ...) 微分係数を用いて f が $x = a$ で最大値・最小値, 極大値・極小値をとるかどうかを判定するような必要十分条件はあり得ない. そのことの理由を述べなさい (例 3.2 を参照せよ) .
 (3) 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値をとる (実は最小値をとる) ことを示しなさい (例 3.4) .
- III-2 関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ のグラフを描き, どこで極値 (極大値・極小値) をとるかを指摘しなさい. それらの点で f は最大値・最小値をとるか .
- III-3 (1) 定理 3.5 の A (B) の逆は成立しないことを確かめなさい (注意 3.7) .
 (2) 定理 3.5 の C の逆は成立しないことを確かめなさい (注意 3.7) .
- III-4 関数 $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2$ (p, q は定数) の極値を調べなさい (ヒント: 3 次方程式 $f'(x) = 0$ が一つの実数解しか持たない場合, 3 つの異なる実数解を持つ場合, 1 組の重根とそれ以外の一つの解を持つ場合, 3 重根を持つ場合に分けて考える)
- III-5 定理 3.5 の B が成り立つ理由の「いい加減バージョン」の $m < 0$ の場合を完成させなさい .
- III-6 定理 3.5 の C が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」をつくりなさい .
- III-7 定理 3.5 の状況で $f'(a) = 0, f''(a) = 0$ のときはなにが起きているか .
- III-8 次の集合は \mathbf{R}^2 の領域か .

$$\mathbf{R}^2, \quad \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}, \quad \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0\}, \\ \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

- III-9 補題 3.13 の証明を完成させなさい .
- III-10 $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$ に対して
- $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ となる (x, y) をすべて求めなさい (ここで虚数解は考えない. なぜか)
 - 上で求めた (x, y) に対して定理 3.12 を適用することにより, 次のことを確かめなさい: 「 $f(x, y)$ は $(x, y) = (1/3, 1/3)$ で極小値 $-1/27$ をとり, それ以外の点では極値をとらない .」
- III-11 関数 $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2 - y^2}$ の極値を調べなさい. ただし a, b は正の定数である (テキスト 74 ページ問題 10) .
- III-12 関数 $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ の極値を調べなさい .

- III-13 \mathbf{R}^2 の領域 D で定義された関数 $f(x, y)$ が調和関数¹³⁾ であるとは, D 上で $f_{xx} + f_{yy} = 0$ が成り立つことである. 調和関数 f の 2 次偏導関数 f_{xx} が D 上で 0 にならなければ f は D 上で極値をとらない. このことを証明しなさい .

¹³⁾ 調和関数: a harmonic function.

IV. 極限と連続性

IV.1 数列の極限

実数の絶対値 実数 x に対して、「 $x \geq 0$ のとき $|x| = x$, $x < 0$ のとき $|x| = -x$ 」で定まる数 $|x|$ を x の絶対値という. 任意の実数 x, y に対して

$$(4.1) \quad |x| \geq 0, \quad |x| \geq x, \quad |-x| = |x|, \quad |x|^2 = x^2, \quad |xy| = |x||y|$$

が成り立つことがわかる. また, 実数 a と正の数 δ に対して次が成り立つ:

$$(4.2) \quad |x - a| < \delta \quad \text{であるための必要十分条件は} \quad a - \delta < x < a + \delta.$$

補題 4.1 (三角不等式¹⁾). 任意の実数 x, y に対して次が成り立つ:

$$(a) \quad |x + y| \leq |x| + |y|, \quad (b) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

証明. $(x, y) = (0, 0)$ なら不等式は明らか. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, (4.1) から

$$\begin{aligned} (|x| + |y| - |x + y|)(|x| + |y| + |x + y|) &= (|x| + |y|)^2 - (|x + y|)^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x + y)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0 \end{aligned}$$

だが, $|x| + |y| + |x + y| > 0$ なので (a) を得る.

さらに (a) を用いれば

$$|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|, \quad |y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$$

なので (b) が得られる. \square

数列の極限 数列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ を $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, または $\{a_n\}$ と書く:

定義 4.2. 数列 $\{a_n\}$ が実数 α に収束する²⁾ とは, 次が成り立つことである.

任意の正の実数 ε に対して以下をみたす番号 N が存在する³⁾:

$n \geq N$ をみたす任意の番号 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

^{*})2017年12月25日/2018年1月5日(2018年1月5日訂正)

¹⁾三角不等式: the triangle inequality. この名前は, 三角形の2辺の長さの和は他の1辺の長さより大きい, という定理に対応する不等式 $|\overline{AB} + \overline{BC}| \leq |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ の類似しているところから来ている.

²⁾数列 $\{a_n\}$ が α に収束する: A sequence $\{a_n\}$ converges to α ; 発散する: to diverge.

³⁾ここでは「番号」で負でない整数のことを表す.

このとき「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 」, 「 $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ 」と書き, α を $\{a_n\}$ の極限值という. 数列 $\{a_n\}$ がいかなる数にも収束しないとき, 発散するという.

定義 4.3. 数列 $\{a_n\}$ が正の(負の)無限大に発散するとは⁴⁾,

「任意の実数 M に対して, 次をみたす番号 N が存在する: $n \geq N$

をみたす任意の番号 n に対して $a_n > M$ ($a_n < M$) が成り立つ」

が成立することである. このことを「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ($-\infty$)」と書く.

補題 4.4. (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, 次をみたす実数 M が存在する: 任意の番号 n に対して $|a_n| \leq M$.⁵⁾

(2) 数列 $\{a_n\}$ が正の数 α に収束するならば, ある番号 N で, $n \geq N$ をみたす任意の n に対して $a_n \geq \frac{\alpha}{2}$ が成り立つものが存在する. とくに, ある番号から先は a_n は正である.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するならば数列 $\{1/a_n\}$ は 0 に収束する.

証明. (1): 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するならば(定義 4.2 の ε として 1 をとる)「 $n \geq N$ をみたす n に対して $|a_n - \alpha| < 1$ 」となる番号 N が存在する. この N に対して $M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |\alpha - 1|, |\alpha + 1|\}$ とすれば⁶⁾, M は結論をみたす.

(2): 定義 4.2 の ε として $\alpha/2$ (> 0) をとれば「 $n \geq N$ をみたす任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \alpha/2$ 」となる番号 N が存在する. この N に対して結論が成り立つ.

(3): 正の数 ε を任意にとると, (定義 4.3 の M を $1/\varepsilon$ として)「 $n \geq N$ ならば $|a_n| > 1/\varepsilon$ 」となる番号 N が存在する. このとき $n \geq N$ ならば $|1/a_n| < \varepsilon$. \square

補題 4.5. (1) 定数 c に対して $a_n = c$ とすると $\{a_n\}$ は c に収束する.

(2) 数列 $\{a_n\}$ が α に, $\{b_n\}$ が β に収束するとき, $n \rightarrow \infty$ で

$$(a) \quad a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta, \quad (b) \quad a_n b_n \rightarrow \alpha \beta, \quad (c) \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ. ただし (c) では $\beta \neq 0$ と仮定する.

証明. (1): 正の数 ε を任意にとり, $N = 0$ とすると, $n \geq N$ をみたす任意の n に対して $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. (2) (a): 番号 N_1, N_2 を「 $n \geq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ 」, 「 $n \geq N_2$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ 」となるようにとり $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $n \geq N$ ならば三角不等式(補題 4.1)から

⁴⁾正(負)の無限大に発散する: to diverge to the positive (negative) infinity.

⁵⁾このとき数列 $\{a_n\}$ は有界であるという.

⁶⁾ $\max\{\dots\}$ は $\{\dots\}$ 内の有限個の数のうち最大のものを表す.

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) (b): 補題 4.4 の (1) から $|a_n| \leq M$ をみたく正の実数 M が存在する. 与えられた正の数 ε に対して番号 N を,

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (n \geq N)$$

となるようにとり ($\beta = 0$ の場合は第一の条件は不要), 式変形

$$a_n b_n - \alpha \beta = a_n b_n - a_n \beta + a_n \beta - \alpha \beta = a_n (b_n - \beta) + \beta (a_n - \alpha)$$

を用いればよい. (2) (c): (b) を認めれば, $1/b_n \rightarrow 1/\beta$ を示せば十分. 補題 4.4 の (2) から, ある番号 N_1 を「 $n \geq N_1$ ならば $|b_n| \geq |\beta/2|$ 」となるようにとれる. 一方, $b_n \rightarrow \beta$ なので「 $n \geq N_2$ ならば $|b_n - \beta| < \beta^2 \varepsilon / 2$ 」となるような番号 N_2 をとることができる. そこで, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば結論が得られる. \square

補題 4.6 (はさみうち). (1) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束し, さらにすべての番号 n に対して $a_n \leq b_n$ が成り立つならば $\alpha \leq \beta$.

(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が, 各番号 n に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ をみたし, さらに, $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ値 α に収束するならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$.

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して, 各項の絶対値をとった数列 $\{|a_n|\}$ が 0 に収束するならば, $\{a_n\}$ も 0 に収束する.

(4) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がすべての番号 n に対して $a_n \leq b_n$ をみたし, $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するならば, $\{b_n\}$ も正の無限大に発散する.

証明. (1): 背理法による. $\beta < \alpha$ と仮定すると $\varepsilon := (\alpha - \beta)/3$ は正の実数である. このとき「 $n \geq N_1$ をみたく任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ 」, 「 $n \geq N_2$ をみたく任意の n に対して $|b_n - \beta| < \varepsilon$ 」となる番号 N_1, N_2 が存在する. したがって, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると, ε のとり方から, 次のように矛盾が得られる:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq b_N < \beta + \varepsilon \quad \text{だから} \quad \frac{2}{3}\alpha + \frac{\beta}{3} \leq \frac{2}{3}\beta + \frac{\alpha}{3} \quad \text{すなわち} \quad \alpha \leq \beta.$$

(2): 任意の番号 n に対して $a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha$ なので

$$|c_n - \alpha| \leq \max\{|a_n - \alpha|, |b_n - \alpha|\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. ここで $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに α に収束するから, 任意の正の数 ε に対して, ある番号 N で「 $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon, |b_n - \alpha| < \varepsilon$ 」が成り立つものが存在する. この N に対して $n \geq N$ ならば $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

(3): $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ と (2) を用いる. (4): 任意の実数 M をとると「 $n \geq N$ ならば $a_n > M$ 」となる番号 N が存在する. この N に対して $n \geq N$ なら $b_n \geq a_n > M$ なので結論が得られた. \square

IV.2 実数の連続性

実数全体の集合⁷⁾ R は (1) 加減乗除が自由にでき, (2) 大小の関係が定義されて, 然るべき性質をみたく, という重要な性質をもつが, これらは有理数全体の集合ももつ性質である. 実数全体の集合を特徴付ける性質は, 高等学校ではあからさまに述べられていないので, ここで紹介する.

集合 $A \subset R$ が上に有界 (下に有界) とは「任意の $x \in A$ に対して $x \leq M$ ($x \geq M$)」が成り立つような実数 M が存在することである⁸⁾. このような M を A の上界 (下界) という. 上下に有界な集合を単に有界であるという.

定義 4.7. 上 (下) に有界な集合 A の上界 (下界) のうち最小 (最大) のものを A の上限 (下限)⁹⁾ といい, $\sup A$ ($\inf A$) と書く.

補題 4.8. 数 α が集合 A の上限 (下限) であるための必要十分条件は次の 2 つが成り立つことである: (1) 任意の $x \in A$ に対して $x \leq \alpha$ ($x \geq \alpha$). (2) $a < \alpha$ ($a > \alpha$) ならば $a < x \leq \alpha$ ($\alpha \leq x < a$) をみたく $x \in A$ が存在する.

証明. α が A の上界であることと (1) は同値である. また α より小さい任意の実数 a が A の上界でないことと (2) は同値である. \square

系 4.9. 集合 A の上界 M が A の要素ならば M は A の上限である.

公理 4.10 (実数の連続性¹⁰⁾¹¹⁾. 上に (下に) 有界な, 空集合でない実数の集合は上限 (下限) をもつ.

注意 4.11. 有理数全体の集合 Q は公理 4.10 の性質をもたない. たとえば $A := \{x \in Q \mid x^2 < 2\}$ は上に有界な有理数の集合だが, 上限は存在しない. 実際 $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ なので 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, ... は A の上界であるが, その最小数は Q の中に入らない.

⁷⁾ 実数全体の集合: the set of real numbers.

⁸⁾ 有界: bounded; 上に有界: bounded from above; 下に有界: bounded from below.

⁹⁾ 上限: the supremum, 下限: the infimum.

¹⁰⁾ 実数の連続性: continuity of real numbers.

¹¹⁾ 公理 (an axiom) とは, 議論の最初におく仮定のことをいう. ここでは, 実数全体の集合を, その性質によって間接的に定義していることになっている.

数列 $\{a_n\}$ の全部の項がなす集合が上に (下に) 有界なとき, 数列は上に (下に) 有界であるという. 一方, 数列 $\{a_n\}$ が単調非減少 (単調非増加) であるとは

$$a_j \leq a_{j+1} \quad (a_j \geq a_{j+1}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つことである.

定理 4.12. 上に (下に) 有界な単調非減少 (単調非増加) 数列は収束する¹²⁾.

証明. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界かつ単調非減少とすると, 公理 4.10 から集合 $\{a_n\}$ の上限 α が存在する. このとき, 各項は $a_n \leq \alpha$ をみたく (補題 4.8 (1)). さらに, 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < a_N$ をみたく番号 N が存在する (補題 4.8 (2)). すると, 単調非減少であることから, $n > N$ をみたく任意の番号 n に対して $\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n (\leq \alpha)$. したがって $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となるので, 極限の定義から $\{a_n\}$ は α に収束する. \square

命題 4.13. 自然数の列 $\{n\}$ は上に有界ではない. (アルキメデス¹³⁾ の原理).

証明. 数列 $\{n\}$ が上に有界ならば, 公理 4.10 から収束する. 極限値を α とすると, 定義 4.2 の ε を $\frac{1}{2}$ として, 「 $n \geq N$ ならば $|n - \alpha| < \frac{1}{2}$ 」となるような N が存在する. とくに $\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}$ ($n \geq N$) であるが, n を一つ増やすとこの区間からはみ出してしまい, 矛盾. したがって, この数列は上に有界でない. \square

次は命題 4.13 の言い換えである:

系 4.14. 任意の実数 M に対して $M < n$ をみたく自然数 n が存在する.

系 4.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

証明. 任意の実数 M に対して系 4.14 から, $N > M$ をみたく自然数 N が存在する. このとき, $n \geq N$ をみたく任意の番号 n に対して $M < N < n$. したがって数列 $\{n\}$ は正の無限大に発散する. 後半は補題 4.4 から従う. \square

連続性の公理から, 次のことがわかる:

定理 4.16. 閉区間 $I = [\alpha, \beta]$ 内の数列 $\{p_n\}$ に対して, 増加する番号の列 $n_0 < n_1 < n_2 \dots$ で数列 $\{p_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ が I の要素に収束するものが存在する¹⁴⁾.

¹²⁾実は定理 4.12 は公理 4.10 と同値である. すなわち, 連続性の公理をこの命題に置き換えても論理的には全く差し支えない.

¹³⁾Archimedes, B.C. 287–B.C. 212; Gr.

¹⁴⁾この事実を「有界数列は収束する部分列をもつ」ともいう.

証明. 各番号 k に対して集合 $Q_j := \{p_j, p_{j+1}, \dots\}$ は上に有界なので, 連続性の公理 4.10 から $q_j := \sup Q_j$ が存在する. とくに $Q_{j+1} \subset Q_j$ だから $q_{j+1} \leq q_j$. また Q_j の各要素は α 以上だから, $q_j \geq \alpha$. したがって $\{q_j\}$ は下に有界な単調非増加数列だから, 定理 4.12 からある実数 γ に収束する. そこで, $\{p_n\}$ から項を選んで γ に収束する数列を構成しよう: まず $n_0 = 0$ として, 次のように帰納的に n_j を定める: n_j が与えられたとき, Q_{n_j+1} の上限は q_{n_j+1} だから, $p_m > q_{n_j+1} - (1/(j+1))$ となる m ($m \geq n_j+1$) が存在する. この m を n_{j+1} と定める. すると, $q_{n_{j+1}} - (1/j) < p_{n_j} \leq \gamma$ が成り立つが, 数列 $\{q_{n_{j+1}}\}$ は $\{q_n\}$ と同様に γ に収束するので, $j \rightarrow \infty$ とすれば $\{p_{n_j}\}$ が γ に収束することがわかる. \square

IV.3 関数の極限

数列にならって, 関数の極限を「限りなく」などの語を用いずに定義する¹⁵⁾.

定義 4.17. 数直線上の区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \rightarrow a$ で α に収束するとは, 次が成り立つことである:

任意の正数 ε に対して以下をみたく正の数 δ が存在する:

$$0 < |x - a| < \delta \text{ をみたく任意の } x \in I \text{ に対して } |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

このことを「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ 」, 「 $f(x) \rightarrow \alpha$ ($x \rightarrow a$)」と表す. また,

任意の正数 ε に対して以下をみたく正の数 δ が存在する¹⁶⁾:

$$0 < x - a < \delta \text{ をみたく任意の } x \in I \text{ に対して } |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つとき, x が a に (右から) 近づくときの f の右極限値は α であるといい, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ と書く. 左極限値も同様.

この定義によって第 II 回の補題 2.23 に証明を与える:

補題 4.18 (補題 2.23). 点 a を含む开区間 I から a を除いた集合 $I \setminus \{a\} = \{x \in I \mid x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$ をみたしているならば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ である.

証明. 任意の正の数 ε に対して, 正の数 δ_1, δ_2 で「 $0 < x - a < \delta_1$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ 」, 「 $-\delta_2 < x - a < 0$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ 」となるようなものをとることができる. そこで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと, $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ となる. \square

¹⁵⁾ここでの定義を, 習慣的に用いる文字を使って「 ε - δ 式の定義」という. コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857 Fr) によるものらしい.

命題 4.19. 区間 I から a を取り除いた集合で定義された関数 f が $x \rightarrow a$ で正の数 α に収束するならば, 次をみたす正の数 δ が存在する: 「 $0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > \alpha$ である。」

証明. 定義 4.17 の条件が成り立っているのだから, とくに $\varepsilon = \alpha/2$ とおいてやれば「 $0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$ が成り立つ」ような δ が存在する. このとき, $0 < |x-a| < \delta$ ならば $f(x) - \alpha > -\frac{\alpha}{2}$, すなわち $f(x) > \frac{\alpha}{2} > 0$. \square

定義 4.20. (1) 区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \rightarrow a$ で正の無限大に発散するとは, 次が成り立つことである:

任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 δ が存在する: $0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

このことを「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ 」「 $f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow a)$ 」と書く.

(2) 数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \rightarrow +\infty$ で実数 α に収束する ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$) とは, 次が成り立つことである:

任意の正の数 ε に対して以下をみたす正の数 $m (> b)$ が存在する: $x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

(3) 数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \rightarrow +\infty$ で正の無限大に発散する ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) とは, 次が成り立つことである:

任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 $m (> b)$ が存在する: $x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

負の無限大への発散, $x \rightarrow -\infty$ のときの極限も同様に定義することができる.

定理 4.21. 区間 I から $a \in I$ を除いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ をみたすための必要十分条件は,

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad a_n \in I \setminus \{a\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をみたす任意の数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \alpha$ が成り立つことである.

証明. [必要性] $f(x) \rightarrow \alpha (x \rightarrow a)$ とするとき, $(*)$ をみたす数列 $\{a_n\}$ が, $f(a_n) \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ をみたすことを示したい: 正の数 ε を任意にとると, $f(x) \rightarrow \alpha$ であることから「 $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ 」をみたす正の数 δ が存在する. ここで $a_n \rightarrow a$ であるから, この δ に対して「 $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \delta$ 」となるよう

な番号 N をとることができる. とくに $(*)$ から $a_n \neq a$ なので, ここでとった N に対して $n \geq N \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - \alpha| < \varepsilon$ となる. ε は任意だったので $f(a_n) \rightarrow \alpha$ が得られた.

[十分性] 対偶を示す. すなわち「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ でない」を仮定して, 結論「(任意の数列 $\{a_n\}$ が $(*)$ をみたすならば $f(a_n)$ は α に収束する) でない」を導く. 仮定, 結論を書き換えると (節末の補足参照)

仮定: 次をみたす ε が存在する: 任意の正の数 δ に対して, $0 < |x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - \alpha| \geq \varepsilon$ となる x がとれる.

結論: 次をみたす数列 $\{a_n\}$ が存在する: $(*)$ をみたし, $f(a_n)$ は α に収束しない.

この仮定をみたす正の数 ε をとって固定しておく. このとき, 任意の番号 n に対して $\delta = 1/n$ とおけば, $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(a_n) - \alpha| \geq \varepsilon$ となるような a_n をとることができる. こうして得られた数列 $\{a_n\}$ は条件 $(*)$ をみたす (確かめよ). 一方, $|f(a_n) - \alpha| \geq \varepsilon$ がすべての n に対して成り立つから $\{f(a_n)\}$ は α に収束しない. \square

注意 4.22. 定理 4.21 を否定することで, 関数 f が $x \rightarrow a$ で α に収束しないための必要十分条件は, 次のような数列 $\{a_n\}$ が存在すること¹⁷⁾ である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{かつ} \quad \{f(a_n)\} \text{ は } \alpha \text{ に収束しない.}$$

IV.4 連続関数

定義 4.23. 区間 I で定義された関数 f が I の点 a で連続であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

をみたすことである. とくに, I の各点で連続な関数を区間 I で連続という.

とくに, 定理 1.1 より微分可能な関数は連続である.

例 4.24. 関数 f が a を含む开区間で C^1 -級 (注意 1.10 参照) で, $f'(a) > 0$ が成り立っているならば, f が I 上で単調増加であるような a を含む开区間 I が存在する. 実際, C^1 -級であることから $f'(x)$ は連続だから $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a) > 0$. したがって, 命題 4.19 から $0 < |x-a| < \delta$ ならば $f'(x) > 0$ となる正の数 δ が存在する. このことと定理 1.9 から f は区間 $(a-\delta, a+\delta)$ で単調増加である. 例 1.3 と比較せよ. \diamond

¹⁷⁾ 定理 4.21 の状態で, 収束をいうためには a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ に対して $\{f(a_n)\}$ が α に収束することを言わなければならないが, 収束しないことをいうためには, $\{f(a_n)\}$ が α に収束しないような $\{a_n\}$ をひとつ見つければよい.

最大・最小値の定理 平均値の定理 1.4 の証明で、連続関数に関する最大・最小値の定理 (定理 1.13) を用いた。ここではこれに証明を与えよう。

定理 4.25 (最大・最小値の定理 (定理 1.13)). 閉区間 $I = [\alpha, \beta]$ で連続な関数 f は、 I で最大値・最小値をとる。

証明. 最大値の存在のみを示す: 関数 f の像 $Y := \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ は実数の集合で、上に有界である。実際、もし A が上に有界でないなら、任意の番号 n に対して $y_n \geq n$ となる $y_n \in Y$ が存在する。ここで $y_n \in Y$ なので $y_n = f(x_n)$ をみたく $x_n \in [\alpha, \beta]$ をとることができる。すると定理 4.16 から、部分列 $\{x_{n_j}\}$ で $\gamma \in [\alpha, \beta]$ に収束するものが存在する。このとき $n_j \leq y_{n_j} = f(x_{n_j})$ だが、 $j \rightarrow +\infty$ のとき n_j は $+\infty$ に発散するのに対し、定理 4.21 と f の連続性から $f(x_{n_j})$ は $f(\gamma)$ に近づき、矛盾が生じる。

したがって f の像 Y は有界なので、 $\eta := \sup Y (\leq 0)$ とおく。このとき、補題 4.8 から、(1) 任意の $x \in [\alpha, \beta]$ に対して $f(x) \leq \eta$ 、(2) 各番号 n に対して $\eta - (1/n) < y_n = f(x_n)$ となるような $x_n \in [\alpha, \beta]$ が存在する。そこで数列 $\{x_n\}$ の、ある $\gamma \in [\alpha, \beta]$ に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をとる (定理 4.16) と、

$$\eta = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\eta - \frac{1}{n_j} \right) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \eta = \eta$$

したがって、 $f(\gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = \eta$ 。このことは f が γ で最大値をとることを示している (問題 IV-10)。□

中間値の定理 高等学校で学んだ中間値の定理¹⁸⁾ も、最大・最小値の定理と同様、実数の連続性の帰結である。

定理 4.26 (中間値の定理). 閉区間 $[\alpha, \beta]$ で連続な関数 f が $f(\alpha) < 0$ 、 $f(\beta) > 0$ をみたすならば、 $f(\gamma) = 0$ 、 $\alpha < \gamma < \beta$ をみたす実数 γ が少なくともひとつ存在する。

証明. 集合 $Y := \{x \in [\alpha, \beta] \mid f(x) \leq 0\}$ は空でない、上に有界な集合である。そこで $\gamma = \sup Y$ とおく。この γ が求めるものである。実際、各番号 n に対して $x_n \in Y$ で $\gamma - (1/n) < x_n \leq \gamma$ となるものが存在する。とくに $\{x_n\}$ は γ に収束するので、定理 4.21 から $f(x_n)$ は $f(\gamma)$ に収束する。とくに $x_n \in Y$ から $f(x_n) < 0$ なので補題 4.6 から $f(\gamma) \leq 0$ 。したがって仮定より $\gamma < \beta$ 。いま $f(\gamma) < 0$ とすると、命題 4.19 を $-f$ に適用すれば、 $\gamma - \delta < x < \gamma + \delta$ で $f(x) < 0$ となるような正の数 δ がとれる。とくに γ より大きい x で $x \in Y$ となるものが存在し、 γ が上限であることに矛盾する。したがって $f(\gamma) = 0$ となる。□

¹⁸⁾ 中間値の定理: the intermediate value theorem.

補足: ド・モルガンの法則

今回使った「収束することの否定」を記述するために、ド・モルガンの法則¹⁹⁾ の復習をしておく。ここでは、 P, Q, R などで、真・偽²⁰⁾ いずれかの値をとる文を表すこととする²⁰⁾。このとき、次のように定める²¹⁾

- 「 P かつ Q 」は、 P, Q がともに真のとき真、それ以外は偽。
- 「 P または Q 」は、 P, Q がともに偽のとき偽、それ以外は真。
- 「 P でない」は P の真・偽を入れ替える。
- 「 P ならば Q 」は P が真で Q が偽となるとき偽、それ以外は真。

とくに

$$(4.3) \quad \text{「} P \text{ ならば } Q \text{」} \quad \text{は} \quad \text{「} P \text{ でない} \text{」 または } Q \text{」} \quad \text{と同値。}$$

事実 (ド・モルガンの法則).

「 $(P$ かつ $Q)$ でない」は「 $(P$ でない) または $(Q$ でない)」と同値、

「 $(P$ または $Q)$ でない」は「 $(P$ でない) かつ $(Q$ でない)」と同値。

ド・モルガンの法則と (4.3) から

$$(4.4) \quad \text{「} P \text{ ならば } Q \text{」 でない} \text{」} \quad \text{は} \quad \text{「} P \text{ かつ } (Q \text{ でない) \text{」} \quad \text{と同値。}$$

さて、不定の文字 x を含む文 $P(x), Q(x)$ に対して

- 「すべての x に対して $P(x)$ 」
- 「ある x に対して $P(x)$ 」すなわち「 $P(x)$ となる x が存在する」

という形の文を全称命題 (前者)、特称命題 (後者) という。全称命題は、考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を “and” でつなげたもの、特称命題は、考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を “or” でつなげたものとみなせる。これらの否定についても、有限個の and, or の場合と同様の法則が成り立つ:

事実 (ド・モルガンの法則 2). (1) 「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」でない」は「ある x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値。

(2) 「ある x に対して $P(x)$ が成り立つ」でない」は「すべての x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値。

例. • $P =$ 「数列 $\{a_n\}$ が α に収束する」の否定、すなわち「 $\{a_n\}$ が α に収束しない」ことの言い換えを与えよう。定義 4.2 から P は

任意の正の数 ε に対して

$$\left[\text{ある自然数 } N \text{ が存在して} \left(\text{すべての自然数 } n \text{ に対して} \right. \right. \\ \left. \left. \{n \geq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon\} \right) \right]$$

¹⁹⁾ ド・モルガンの法則: de Morgan's laws; ド・モルガン: Augustus de Morgan, 1806–1871,

²⁰⁾ 真: true; 偽: false.

²¹⁾ P かつ $Q: P \text{ and } Q; P$ または $Q: P \text{ or } Q; P$ でない: not $P; P$ ならば $Q: P \text{ implies } Q$.

であるから、順番にド・モルガンの法則を適用して、「 P でない」は

ある正の数 ε に対して

$$\left[\text{任意の自然数 } N \text{ に対して} \left(\text{ある自然数 } n \text{ が存在して} \right. \right. \\ \left. \left. \{n \geq N \text{ かつ } |a_n - \alpha| \geq \varepsilon\} \right) \right]$$

となる。これをもう少し書き換えると「 $\{a_n\}$ が α に収束しない」とは

「次をみたます正の数 ε が存在する: 任意の番号 N に対して $n \geq N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ となる n をとることができる。」

- 同様に「 $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \alpha$ でない」は

「次をみたます正数 ε が存在する: 任意の正の数 δ に対して $0 < |x - \alpha| < \delta$ かつ $|f(x) - \alpha| \geq \varepsilon$ となる x がとれる。」 \diamond

問 題 IV

IV-1 実数 r に対して $\{r^n\}$ で与えられる数列に対して次を示しなさい:

- (1) $r > 1$ なら正の無限大に発散する。
- (2) $r = 1$ なら 1 に収束する。
- (3) $-1 < r < 1$ なら 0 に収束する。
- (4) $r \leq -1$ なら発散するが、正負いずれの無限大にも発散しない。

IV-2 二項定理 (問題 I-10) を用いて

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \\ \geq 1 + \sqrt{2}\sqrt{n} + (n-1) \geq n.$$

を示すことにより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示しなさい。

IV-3 項が 0 から 9 までの整数である数列 $\{p_n\}$ に対して

$$a_n := p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} = \sum_{k=0}^n p_k 10^{-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とすると $\{a_n\}$ は収束することを示しなさい。この極限値が、十進小数 $p_0.p_1p_2p_3\dots$ が表す実数である。

IV-4 実数 s に対して、数列 $\{n^s\}$ は (1) $s > 0$ ならば正の無限大に発散する。(2) $s = 0$ ならば 1 に収束する。(3) $s < 0$ ならば 0 に収束する。このことを示しなさい。

IV-5 次で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを、定理 4.21 を用いて示しなさい:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

通常これを e の定義とする。

IV-6 区間 I から a を抜いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f, g が、 $x \rightarrow a$ のときに α, β に収束しているとする。このとき

$$f(x) + g(x) \rightarrow \alpha + \beta, \quad f(x)g(x) \rightarrow \alpha\beta, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ。ただし、最後の式では $\beta \neq 0$ とする。このことを、定理 4.21 と、数列の極限に関する補題 4.5 を用いて示しなさい。

IV-7 正の実数 α と c に対して関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ c & (x = 0) \end{cases}$$

と定めるとき、

- (1) f が 0 で連続であるための条件は何か。
- (2) f が 0 で微分可能であるための条件は何か。
- (3) 導関数 f' が 0 で連続であるための条件は何か。

IV-8 正の実数 α と正の整数 n に対して、 $c^n = \alpha$ となる正の実数 c がただ一つ存在する。このことを、中間値の定理 4.26 を用いて示しなさい。

この c を α の (正の) n 乗根という。

IV-9 関数 f は区間 $[a, b]$ で連続、かつ単調増加であるとし、 $Y := [f(a), f(b)]$ とする。このとき、

- (1) 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ をみたます $x \in [a, b]$ がただ一つ存在することを示しなさい。
- (2) 上の状況で、 $y \in f(I)$ は任意にとれるから、

$$\mathbf{R} \supset Y \ni y \mapsto \text{“} f(x) = y \text{ をみたます } x \text{”} \in \mathbf{R}$$

により新しい関数が定義される。この関数を f の逆関数とよび f^{-1} と書く。連続関数 f の逆関数 f^{-1} は $f(I)$ で連続であることを示しなさい。

IV-10 定理 4.25 の証明の最後の行「 $f(\gamma) = \eta = \sup Y$ ならば f は γ で最大値をとる」ことを証明しなさい。

V. 級数

V.1 級数

収束・発散 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して

$$(5.1) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

の形を級数または無限級数という¹⁾。級数 (5.1) に対して

$$(5.2) \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって新たな数列 $\{s_n\}$ (部分和) を定義する²⁾。

定義 5.1. 級数 (5.1) が収束するとは、式 (5.2) で与えられる数列 $\{s_n\}$ が収束することである。このとき、 $\{s_n\}$ の極限值 c を級数 (5.1) の和とよび、

$$c = a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と表す³⁾。収束しない級数は発散するという。

定理 5.2. 級数 (5.1) が収束するならば、数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する。

証明. 一般に、収束する数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $q_n = p_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定まる数列 $\{q_n\}$ は同じ極限值に収束する (問題 V-2)。

式 (5.2) の $\{s_n\}$ と $\{t_n = s_{n+1}\}$ はどちらも級数の和 c に収束するので、

$$0 = c - c = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad \square$$

定理 5.2 の対偶をとれば

系 5.3. 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない⁴⁾ ならば級数 (5.1) は発散する。

^{*)}2018 年 1 月 15 日/1 月 19 日

¹⁾級数: a series; 無限級数: an infinite series; 式 (5.1) は一般に数を表すのではなく、 a_j を記号 “+” でつないで並べた “絵” とみなす。

²⁾式 (5.2) の右辺は有限個の和なので、 s_n はひとつの数である。

³⁾すなわち、(5.1) は、収束するときに限り、一つの数を表すことになる。

⁴⁾このことは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ とは異なる。第 IV 節の補足参照。

例 5.4. 定理 5.2 の逆は成立しない。実際、次の例がある⁵⁾：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{であるが} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{は発散する。}$$

このことを確かめよう。部分和を $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおく。正の整数 m に対して $n \geq 2^m - 1$ をみたま番号 n を任意にとると、

$$\begin{aligned} s_n &\geq s_{2^m-1} = \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{k} \right) \\ &\geq \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{2^l} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{2^{l-1}}{2^l} = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

番号 m は任意にとれるので、とくに $\{s_n\}$ は正の無限大に発散する (定義 4.3 の条件をみたま番号 n を任意にとると)。この級数を調和級数という⁶⁾。◇

例 5.5. 実数 r に対して初項 1、公比 r の等比級数は $|r| < 1$ のとき収束し、

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1 \text{ のとき})$$

となり、それ以外の場合は発散する。実際、問題 IV-1 より $|r| \geq 1$ なら $\{r^n\}$ は 0 に収束しないので、系 5.3 より考えている級数は発散する。一方、 $|r| < 1$ のときは問題 IV-1 を用いて次を得る：

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \rightarrow \frac{1}{1-r} \quad (n \rightarrow \infty). \quad \diamond$$

正項級数 数列 $\{a_n\}$ の各項が $a_n \geq 0$ をみたま番号 n を任意にとると、級数 (5.1) は正項級数とよばれる⁷⁾。正項級数の部分和は単調非減少数列だから、上に有界なら収束し (実数の連続性公理と同値な定理 4.12)、上に有界でないなら正の無限大に発散する。このことから、次の収束判定法が得られる：

⁵⁾式 (5.1) では添字が 0 から始まっているが、この例では添字が 1 から始まる。問題の性質によって添字の番号の付け方が異なるが、適切に読み替えて欲しい。

⁶⁾調和級数: the harmonic progression; 等比級数: a geometric progression (幾何級数); 等差級数: an arithmetic progression (算術級数)。

⁷⁾正項級数: a nonnegative-term series; 言葉の意味からは “非負項級数” というべきだが、習慣的に正項級数とよぶ。

命題 5.6 (正項級数の比較). 負でない実数からなる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が各 n に対して $a_n \leq b_n$ をみたしているとする. このとき

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する.
 (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する.

証明. 部分和をそれぞれ

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad t_n := \sum_{k=0}^n b_k$$

とおくとこれらは単調非減少数列で, 仮定より $s_n \leq t_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つ.

(1): $\sum b_n$ の和を β とすると, 各 n に対して $t_n \leq \beta$ なので, $s_n \leq t_n \leq \beta$ となる. この右辺は n に関係ない定数だから $\{s_n\}$ は上に有界. したがって s_n は収束する.

(2): $\sum a_n$ が発散するなら $\{s_n\}$ は正の無限大に発散するから, 補題 4.6 より $\{t_n\}$ も正の無限大に発散する. \square

注意 5.7. 級数の有限個の項を入れかえても収束・発散という性質は不変である⁸⁾. したがって命題 5.6 の仮定は「ある番号 N から先の番号 n に対して $a_n \leq b_n$ 」とおきかえてもよい. さらに, 有限個の項は負でも構わない.

例 5.8. 実数 p に対して, 次の級数を考える:

$$(5.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p = 1 + 2^p + 3^p + \dots$$

- (1) $p \geq -1$ ならば (5.3) は発散する.
 (2) $p < -1$ ならば (5.3) は収束する⁹⁾.

このことを示そう. 番号 n を一つ固定するとき, $f(x) = n^x$ は x の単調増加関数であることに注意する.

(1): $p \geq -1$ ならば, $n^p \geq n^{-1} = 1/n$ なので, 例 5.4 と命題 5.6 (2) から (5.3) は発散する.

⁸⁾和の値は変わる.

⁹⁾収束することは示すことができるが, 和を求めるのは別問題である. たとえば $p = -2$ の場合, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ となるが, これはオイラーによって 1735 年に求められたといわれている. このような“値を求める”問題は単なる練習問題でないことが多い. Leonhard Euler, 1707–1783, Sz.

(2) ($p \leq -2$ の場合): このとき, $n \geq 2$ に対して

$$n^p \leq n^{-2} = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

ここで

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

は 1 に収束するので, 命題 5.6 の (1) から (5.3) は収束する¹⁰⁾

(2) ($-2 < p < -1$ の場合): $p = -1 - q$ ($q \in (0, 1)$) とおくと, $n \geq 2$ で

$$(n-1)^{p+1} - n^{p+1} = \frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^q} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q - 1 \right)$$

である. いま, テイラーの定理 1.19 から, ある $\theta \in (0, 1)$ に対して

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q &= 1 + \frac{q}{n-1} + \frac{q(q-1)}{2(n-1)^2} \left(1 + \frac{\theta}{n-1}\right)^{q-2} \\ &\geq 1 + \frac{q}{n-1} - \frac{q(1-q)}{2(n-1)^2} = 1 + \frac{q}{n-1} \left(1 - \frac{1-q}{2(n-1)}\right) \\ &\geq 1 + \frac{q}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \geq 1 + \frac{q}{2(n-1)} \geq 1 + \frac{q}{2n} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $0 < q < 1$, $n \geq 2$ を用いた. したがって

$$n^p \leq \frac{2}{q} \left((n-1)^{p+1} - n^{p+1} \right) \quad (n \geq 2)$$

であるが, $p < 0$ に注意すれば

$$\sum_{k=2}^n \frac{2}{q} \left((k-1)^{p+1} - k^{p+1} \right) = \frac{2}{q} (1 - n^{p+1}) \rightarrow \frac{2}{q} \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるので, 命題 5.6 の (1) から (5.3) は収束する. \diamond

交代級数 項がひとつおきに符号を変えるような級数を交代級数¹¹⁾ という.

¹⁰⁾ここで, 比較する数列 $1/(n(n-1))$ は $n \geq 2$ でしか定義されていないが, 級数の収束には最初の有限個の項の挙動は関わりないので $n \geq 2$ の部分の収束を論じれば十分である (注意 5.7 参照).

¹¹⁾交代級数: an alternating series.

定理 5.9 (交代級数の和). 単調非増加で 0 に収束する数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $a_n = (-1)^n q_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n = q_0 - q_1 + q_2 - q_3 + \dots$$

は収束する.

証明. ある番号 n で $q_n = 0$ ならば, そこから先の項はすべて 0 なので, すべての番号 n に対して $q_n > 0$ となる場合のみを考えればよい.

部分和 $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ を考え, 正の整数 j に対して $a_j := s_{2j-1}$, $b_j := s_{2j}$ とおくと,

$$b_j - a_j = s_{2j} - s_{2j-1} = (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} > 0$$

$$a_{j+1} - a_j = s_{2j+1} - s_{2j-1} = (-1)^{2j+1} q_{2j+1} + (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} - q_{2j+1} \geq 0$$

$$b_{j+1} - b_j = s_{2j+2} - s_{2j} = q_{2j+2} - q_{2j+1} \leq 0,$$

とくに $a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$ なので $\{a_n\}$ は上に有界な単調非減少数列なので, 定理 4.12 からある実数 α に収束する. 一方 $\{b_n\}$ は下に有界な単調非増加数列なので, 同様に実数 β に収束する. ここで

$$\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_{2n} = 0$$

なので $\alpha = \beta$.¹²⁾ すなわち, 任意の正の数 ε に対して番号 N_0 で

$$j \geq N_0 \quad \text{ならば} \quad |a_j - \alpha| = |s_{2j-1} - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_j - \alpha| = |s_{2j} - \alpha| < \varepsilon$$

となるものが存在する. そこで $N = 2N_0 - 1$ とすれば「 $n \geq N$ ならば $|s_n - \alpha| < \varepsilon$ 」となり $\{s_n\}$ が α に収束することがわかる. \square

例 5.10. (1) 次の級数は収束する:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

とくに, 例 2.11 (2.13) の $x = 1$ の場合なので, 和は $\log 2$ である.

(2) 次の級数は収束する (問題 V-4 V-4(3)):

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \left(= \frac{\pi}{4} \right).$$

¹²⁾このように, 入れ子になっている区間の列 $\{[a_n, b_n]\}$ で 1 つの実数をはさむ議論をワイエルストラスの区間縮小法とよぶことがある.

(3) 級数

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

は収束する. 第 VI 回で示すようにこの和は

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + 3 \log 2). \quad \diamond$$

V.2 絶対収束・条件収束

(準備) 上極限・下極限. 一般に数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次のようにおく:

$$(5.4) \quad A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \{a_k \mid k \geq n\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(5.5) \quad a_n^+ := \sup A_n, \quad a_n^- := \inf A_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

補題 5.11. (1) $\{a_n\}$ が上に非有界なら, $a_n^+ = +\infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

(2) $\{a_n\}$ が上に有界ならば, $\{a_n^+\}$ は各項が実数の単調非増加数列.

(3) さらに数列 $\{a_n\}$ が下に有界, すなわち $\{a_n\}$ が有界ならば, $\{a_n^+\}$ は下に有界な単調非増加数列.

証明. (1): 番号 n を固定すると, $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ は有限集合だから上に有界. ここで A_n が上に有界ならば, 数列全体が上に有界になってしまうので A_n は上に非有界. したがって $a_n^+ = +\infty$.

(2): $\{a_n\}$ が上に有界ならば, A_n も上に有界だから, 上界 a_n^+ が存在する. さらに $A_n \supset A_{n+1}$ だから a_n^+ は A_{n+1} の上界となるので $a_{n+1}^+ \leq a_n^+$ が成り立つ.

(3): さらに $\{a_n\}$ が下に有界ならば, その下界を α とすると $\alpha \leq a_n$ が各 n に対して成り立つので, $a_n^+ \geq \alpha$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), すなわち $\{a_n^+\}$ は下に有界. \square

同様の性質が $\{a_n^-\}$ に対しても成り立つ.

定義 5.12. 数列 $\{a_n\}$ が上に (下に) 有界であるとき (5.5) の数列 $\{a_n^+\}$ ($\{a_n^-\}$) は収束するか $-\infty$ ($+\infty$) に発散する (定理 4.12). そこで

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^+, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^-$$

と定め, それぞれ $\{a_n\}$ の上極限, 下極限 とよぶ¹³⁾.

¹³⁾上極限: the limit superior; 下極限: the limit inferior. \limsup を $\overline{\lim}$, \liminf を $\underline{\lim}$ と表すこともある.

例 5.13. (1) 数列 $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ の上極限は 1, 下極限は -1 である.

(2) 数列 $\{-n\}$ の上極限と下極限はともに $-\infty$ である. \diamond

補題 5.14. 実数 α が数列 $\{a_n\}$ の上極限であるための必要十分条件は,

(1) 任意の正の数 ε に対して次をみたす番号 N が存在する: $n \geq N$ なる任意の n に対して $a_n < \alpha + \varepsilon$.

(2) 任意の正の数 ε と任意の番号 N に対して $m \geq N$ かつ $\alpha - \varepsilon < a_m$ をみたす番号 m が存在する.

証明. 必要性: 式 (5.5) の $\{a_n^+\}$ は単調非増加で, その極限は α だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して「 $n \geq N$ ならば $a_n^+ - \alpha < \varepsilon$ 」が成り立つような N が存在する. とくに $0 \leq a_n^+ < \alpha + \varepsilon$ であるが, $n \geq N$ のとき $a_n \leq \sup A_N = a_N^+$ なので (1) が成り立つ.

一方, 正の数 ε と番号 N を任意にとると, $a_N^+ = \sup A_N$ だから, $a_N^+ - \varepsilon \leq x$ となる $x \in A_N$ が存在する (補題 4.8). ここで A_N は (5.4) で定義されているから $x = a_m$ ($m \geq N$) となる m が存在するので, (2) が成り立つ.

十分性: α が (1), (2) をみたすならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 「 $m \geq N$ ならば $0 \leq a_m^+ - \alpha < \varepsilon/2$ 」となる番号 N が存在する. この N に対して $n \geq N$ をみたす n を任意にとる. $a_n^+ = \sup A_n$ だから, 補題 4.8 から $a_n^+ - \varepsilon/2 < a_m$ ($m \geq n$) をみたす番号 m が存在するので, $a_n^+ - \frac{\varepsilon}{2} < a_m \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, すなわち $a_n^+ - \alpha < \varepsilon$ を得る. 一方, この n に対して (2) から $\alpha - \varepsilon < a_m$ ($m \geq n$) となる m が存在する. ここで $a_m \in A_n$ だから $a_m \leq \sup A_n = a_n^+$. ゆえに $\alpha - \varepsilon < a_m \leq a_n^+$ すなわち $\alpha - a_n^+ < \varepsilon$ となるので, $|a_n^+ - \alpha| < \varepsilon$. 正数 ε は任意, $n \geq N$ も任意だから, $a_n^+ \rightarrow \alpha$. \square

補題 5.15. 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は, その上極限と下極限が一致することで, そのとき, 極限值は上下極限の値と一致する.

証明. 必要性: 数列 $\{a_n\}$ の上極限を α , 極限を β として, $\beta = \alpha$ を示す. 正数 ε に対して, 番号 N を「 $n \geq N$ ならば $a_n \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ 」となるようにとる. このとき, $-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - \beta \leq \alpha - \beta + \frac{\varepsilon}{2}$ だから $-\varepsilon < \alpha - \beta$. また, この ε, N に対して $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_m$ となる $m \geq N$ が存在するので, $\alpha - \beta - \frac{\varepsilon}{2} < a_m - \beta < \frac{\varepsilon}{2}$ だから $\alpha - \beta < \varepsilon$. したがって $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ が任意の正の数 ε に対して成り立つ. とくに $\varepsilon = 1/m$ (m は正の整数) として $m \rightarrow \infty$ とすれば $\alpha = \beta$ が得られる. 同様に下極限も β と一致する.

十分性: 上極限と下極限が一致したとして, その値を α とすると, 補題 5.14 (1) とそれを下極限に書き換えたものを用いれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次をみたす番号 N の存在がわかる: 「任意の番号 $n \geq N$ に対して $a_n \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_n$ が成り立つ」. この N に対して $n \geq N$ なら $|a_n - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ なので $\{a_n\}$ は α に収束する. \square

命題 5.16. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha > 0, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ をみたすならば, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta$.

証明. 数列 $\{a_n b_n\}$ に対して $\alpha \beta$ が補題 5.14 の条件 (1), (2) をみたすことを示す.

(1): 与えられた正の数 ε に対して, $\varepsilon' = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2(\alpha + |\beta|)}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}$ とおく. このとき,

- $a_n \rightarrow \alpha$ から, 「 $n \geq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon'$ 」をみたす番号 N_1 が存在する.
- $\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ だから, 補題 5.14 の (1) から「 $n \geq N_2$ ならば $b_n < \beta + \varepsilon'$ 」をみたす番号 N_2 が存在する.

そこで $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば $n \geq N$ なる n に対して

$$a_n b_n < (\alpha + \varepsilon')(\beta + \varepsilon') \leq \alpha \beta + (\alpha + |\beta|)\varepsilon' + \varepsilon'^2 \leq \alpha \beta + \varepsilon.$$

(2): 与えられた正の数 ε に対して $\varepsilon'' = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4\alpha}, \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, \alpha \right\}$ とおくと, 「 $n \geq N_3$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon''$ 」をみたす番号 N_3 が存在する. いま, 番号 N を任意にとると, 補題 5.14 の (2) から, $m \geq \max\{N, N_3\}$ をみたす番号 m で $\beta - \varepsilon'' < b_m$ となるものが存在する. このとき $\alpha \beta - \varepsilon < a_m b_m$ を示せば良い. 実際, $\alpha > 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} a_m b_m - \alpha \beta + \varepsilon &\geq a_m (\beta - \varepsilon'') - \alpha \beta + \varepsilon \geq (a_m - \alpha)\beta - a_m \varepsilon'' + \varepsilon \\ &\geq -|a_m - \alpha| |\beta| - (\alpha + \varepsilon'')\varepsilon'' + \varepsilon'' \geq -\varepsilon'' |\beta| - 2\alpha \varepsilon'' + \varepsilon > 0. \quad \square \end{aligned}$$

(準備) コーシーの収束条件. 絶対収束する級数の性質を調べるために, 実数の連続性 (公理 4.10, 定理 4.12) のもう一つの表現を与える:

定義 5.17. 数列 $\{p_n\}$ がコーシー列¹⁴⁾ であるとは, 任意の正の数 ε に対して, 次をみたす番号 N が存在することである:

$$m, n \geq N \text{ をみたす任意の番号 } m, n \text{ に対して } |p_m - p_n| < \varepsilon.$$

補題 5.18. 収束する数列はコーシー列である.

証明. 数列 $\{p_n\}$ の極限值を p とする. 任意の正の数 ε に対して「 $n \geq N$ ならば $|p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ 」となる番号 N が取れる. すると, $m, n \geq N$ に対して

$$|p_m - p_n| = |(p_m - p) - (p_n - p)| \leq |p_m - p| + |p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

¹⁴⁾ コーシー列: a Cauchy sequence.

補題 5.19. コーシー列は上・下に有界である .

証明 . コーシー列 $\{p_n\}$ をとると (定義 5.17 で $\varepsilon = 1$ として) 「 $m, n \geq N$ ならば $|p_m - p_n| < 1$ 」となる番号 N が存在する . とくに $m = N$ として 「 $n \geq N$ ならば $|p_n - p_N| < 1$ 」が成り立つ . したがって , 任意の k に対して

$$|p_k| \leq M \quad (M = \max\{|p_0|, |p_1|, \dots, |p_{N-1}|, |p_N| + 1\}). \quad \square$$

定理 5.20 (コーシーの収束条件). コーシー列は収束する .

注意 5.21. 定理 5.20 は実数の連続性の一つの表現である . 実際 , すべての項が有理数となるコーシー列で , 無理数に収束するものが存在する (問題 V-7) .

定理 5.20 の証明 . 数列 $\{p_n\}$ がコーシー列ならば , 補題 5.19 より有界なので , 上極限・下極限が存在する . そこで $\alpha_- := \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n$, $\alpha_+ := \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n$ とおく .

コーシー列の定義から , 任意の正の整数 k に対して 「 $m, n \geq N_1$ ならば $|p_m - p_n| < 1/(3k)$ 」をみたす番号 N_1 が存在する .

また , α_+ は上極限なので補題 5.14 から 「 $n \geq N_2$ なら $p_n < \alpha_+ + 1/(3k)$ 」となる N_2 が存在し , さらに 「 $m \geq N_2$ かつ $\alpha_+ - 1/(3k) < p_m$ 」となる m が存在する .

同様に , α_- は下極限だから 「 $n \geq N_3$ なら $p_n > \alpha_- - 1/(3k)$ 」が成り立つような N_3 が存在し , さらに 「 $m' \geq N_3$ かつ $\alpha_- + 1/(3k) > p_{m'}$ 」となる m' が存在する .

そこで $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とおくと , $m, m' \geq N$ をみたす番号 m, m' で

$$\alpha_+ - \frac{1}{3k} < p_m < \alpha_+ + \frac{1}{3k}, \quad \alpha_- - \frac{1}{3k} < p_{m'} < \alpha_- + \frac{1}{3k}$$

となる存在する . $|p_m - p_{m'}| < 1/(3k)$ だったので , $|\alpha_+ - \alpha_-| < \frac{1}{k}$ となるが , k は任意なので $\alpha_+ = \alpha_-$ を得る . このことと補題 5.15 から $\{p_n\}$ は収束する . \square

系 5.22. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は , 任意の正の数 ε に対して , 次のような番号 N が存在することである :

$$n \geq N \text{ なる任意の番号 } n \text{ と任意の正の整数 } m \text{ に対して } \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon.$$

証明 . これは部分和 (5.2) からなる数列がコーシー列となることと同値である . \square

絶対収束

定義 5.23. 級数の各項に絶対値をつけることによって得られる級数を与えられた級数の絶対値級数とよぼう :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{の絶対値級数は} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{である .}$$

級数の絶対値級数が収束するとき , もとの級数は絶対収束する¹⁵⁾ という .

定理 5.24. 絶対収束する級数は収束する .

証明 . 級数 $\sum |a_n|$ が収束するならば , 系 5.22 から , 次をみたす番号 N が存在する :

$$n \geq N \quad \text{ならば , 任意の正の整数 } m \text{ に対して } \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

この N に対して $n \geq N$ とすると ,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

であるから , 系 5.22 から $\sum a_n$ も収束する . \square

注意 5.25. 級数 $\sum a_n$ が絶対収束するならば , $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$ が成り立つが , 右辺の和がわかったとしても左辺の値がわかるとは限らない .

系 5.26. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が , ある番号 N 以降の項に対して

$$|a_n| \leq b_n \quad (n \geq N)$$

をみたしているとする . このとき , 級数 $\sum b_n$ が収束するならば級数 $\sum a_n$ は絶対収束する . とくに , この級数は収束する .

証明 . 級数 $\sum |a_n|$ は正項級数だから , 命題 5.6 より結論が得られる . \square

例 5.27. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leq cr^n$ (c, r は正の定数で $0 < r < 1$) ならば , 級数 $\sum a_n$ は絶対収束する (例 5.5 参照) . \diamond

例 5.28. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leq cn^p$ ($c > 0, p < -1$) ならば , 級数 $\sum a_n$ は絶対収束する (例 5.8 参照) . \diamond

¹⁵⁾ 絶対収束 : absolute convergence; 絶対収束する : to converge absolutely. 絶対収束性の定義にはもとの級数が収束することは含まれていないが定理 5.24 から , 絶対収束性は収束性を導く .

上極限を用いて正項級数の収束判定条件を与えよう．これは，第 VI 回の冪級数の収束半径の議論で重要となる：

定理 5.29. 数列 $\{a_n\}$ に対して $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおくと

- (1) $\alpha < 1$ なら級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．
 (2) $\alpha > 1$ なら級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明．まず $0 \leq \alpha < 1$ として，二つの正の数 $\varepsilon := (1 - \alpha)/20$, $r := \frac{1+\alpha}{2} < 1$ をとると，上極限の条件（補題 5.14 (1)）から「 $n \geq N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha + \varepsilon = r$ 」となる N が存在する．このとき $|a_n| \leq r^n$ だから，例 5.27 により $\sum a_n$ は絶対収束．

一方， $\alpha > 1$ のとき， $\varepsilon = (\alpha - 1)/2 > 0$, $r = (1 + \alpha)/2 > 1$ とすると，任意の番号 N に対して $n \geq N$ かつ $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon = r$ となる n が存在する．このとき $|a_n| > 1$ だから， $\{a_n\}$ は 0 に収束しないので，定理 5.2 から $\sum a_n$ は発散する．□

注意 5.30. 定理 5.29 で $\alpha = 1$ の場合は判定できない．実際，例 5.8 の級数はすべて $\alpha = 1$ となるが，収束する場合も発散する場合もある．

級数のすべての項が 0 でないときは問題 V-8 のような収束判定条件もある．

条件収束 収束するが絶対収束しない級数は条件収束する¹⁶⁾ という．

例 5.31. 例 5.10 の級数の収束は条件収束である． ◇

注意 5.32. 絶対収束する級数の和は，だいたい有限の和と同じように扱ってよい．一方，条件収束する級数は複雑な挙動を示す．たとえば

- 絶対収束する級数は，その項を任意に入れかえても同じ和に収束する．
- 条件収束する級数は，項の順番をうまく入れ替えることによって，任意の値に収束させることができる．

証明は難しくないが，ここでは深入りしない．

¹⁶⁾条件収束：conditional convergence; 条件収束する：to converge conditionally.

問 題 V

V-1 次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

- (1) 級数 $\sum a_n$ が収束するならば， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である．
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ならば級数 $\sum a_n$ は収束する．

V-2 数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が c に収束するとき， $q_n = p_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定まる $\{q_n\}$ も c に収束することを，定義 4.2 を直接使って示しなさい．

V-3 例 5.8 の事実を，部分和を積分と比較することにより示しなさい．

V-4 次の級数の和を求めなさい．

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (ヒント：有理化)
 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (ヒント： $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.)
 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (ヒント：例 2.11 に倣って $\tan^{-1} x$ のテイラー級数を求める.)

V-5 実数 r に対して $a_n = nr^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおく．

- (1) $|r| < 1$ のとき $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示しなさい．
 ヒント： $|r| = 1/(1+h)$ ($h > 0$) とおいて $(1+h)^n \geq 1+nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2$.
 (2) $|r| \geq 1$ のとき $\{a_n\}$ は発散することを示しなさい．
 (3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めなさい (ヒント：まず部分和を求めよ.)

V-6 次の級数の収束，発散を調べなさい．

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}.$$

V-7 すべての項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものを挙げなさい．

V-8 数列 $\{a_n\}$ のすべての項が 0 ではなく，極限值 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ が存在するとき，(1) $\alpha < 1$ ならば級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．(2) $\alpha > 1$ ならば級数 $\sum a_n$ は発散する．このことを示しなさい． $\alpha = 1$ の場合はどうか．

V-9 次の級数は $|r| < 1$ のとき絶対収束， $|r| > 1$ のとき発散することを確かめなさい：

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$. ただし p は任意の実数．
 (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} r^n$. ただし α は任意の実数．

VI. 冪級数

与えられた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と文字 x に対して

$$(6.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

の形の級数を x に関する冪級数^{べき}という¹⁾。級数 (6.1) がある範囲 I の x の値に対して収束するならば、これは I 上で定義された関数を表す：

$$(6.2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in I = \{x \in \mathbf{R} \mid (6.1) \text{ は収束} \}.$$

第 II 回のテイラー級数は、与えられた関数を冪級数で表すことができる例である。とくに $|x|$ が小さいとき、(6.2) の f は右辺の最初の数項で近似される。

テイラー級数 (2.14) のように $f(a+h)$ を h の冪級数で表すことができれば、 f の a の近くの挙動を調べられる。とくに $x = a+h$ とおけば、(2.14) は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

の形に書ける。この式の右辺のような形を a を中心とする冪級数ということがある。ここでは、簡単のため 0 を中心とする冪級数 (6.1) を扱う。

VI.1 収束半径

命題 6.1. 冪級数 (6.1) が

- (1) $x = r$ に対して収束するならば、 $|x| < |r|$ をみたく任意の x に対して (6.1) は絶対収束する。
- (2) $x = r$ に対して発散するならば、 $|x| > |r|$ をみたく任意の x に対して (6.1) は発散する。

証明。(1)：定理 5.2 から $a_n r^n$ は 0 に収束するので、番号 N で「 $n \geq N$ ならば $|a_n r^n| < 1$ 」となるものが存在する。すると、 $n \geq N$ なる n に対して

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \left| \frac{x^n}{r^n} \right| \leq \rho^n \quad \left(\rho := \left| \frac{x}{r} \right| < 1 \right)$$

なので、例 5.27 から $\sum a_n x^n$ は絶対収束する。

(2)：もし $|x| > |r|$ をみたく x に対して収束するならば、(1) から $x = r$ で収束することになり、仮定に反する。□

ここで、(6.1) に対して

$$(6.3) \quad r := \sup C, \quad C := \{ |x| \mid \text{級数 (6.1) は収束する} \}$$

とおくと、 $r \geq 0$ または $r = +\infty$ となる。この r を冪級数 (6.1) の収束半径という²⁾。

命題 6.2. 冪級数 (6.1) の収束半径が r であるための必要十分条件は、次が成立することである：

- (i) $|x| < r$ ならば (6.1) は収束する (このとき、命題 6.1 から収束は自動的に絶対収束である)。
- (ii) $|x| > r$ ならば (6.1) は発散する。

とくに $r = +\infty$ であることと、任意の実数 x に対して (6.1) が絶対収束することは同値である。また $r = 0$ であることと任意の $x \neq 0$ に対して (6.1) が発散することは同値である。

証明。必要性：式 (6.3) のように C, r をとるとき、

(i)： $|x| < r$ のとき、 $\frac{1}{2}(r - |x|) = \varepsilon > 0$ とおくと、上限の性質 (補題 4.8 の (2)) から $r - \varepsilon < s$ をみたく $s \in C$ が存在する。とくに s で (6.1) は収束するが、 $|x| = r - 2\varepsilon < s$ なので命題 6.1 から (6.1) は絶対収束する。

(ii)： $|x| > r$ をみたく x で (6.1) が収束するならば、命題 6.1 から $(|x| + r)/2 (> r)$ でも収束するが、これは r の定義に反する。

十分性：実数 r が (i), (ii) をみたくとき、(ii) から r は C の上界となる。さらに (i) から r より小さい数は C の上界でない。したがって $r = \sup C$ 。□

冪級数の収束半径は次のように求められる：

²⁾ 収束半径：the radius of convergence.

^{*}) 2016 年 2 月 6 日 / 2 月 9 日

¹⁾ 冪級数：a power series, 「巾級数」は嘘字。

定理 6.3 (コーシー・アダマールの定理³⁾). 冪級数 (6.1) の収束半径 r は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

で与えられる.

証明. 各 n に対して $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$ なので

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r}.$$

したがって定理 5.29 から ($\alpha = |x|/r$ として) 結論が得られる. \square

定理 6.4 (ダランベールの定理⁴⁾). 冪級数 (6.1) に対して, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

が存在するならば r が収束半径である.

証明. 問題 V-8 を用いれば定理 6.3 と同様. \square

注意 6.5. コーシー・アダマールの定理 6.3 は任意の冪級数の収束半径を与える公式だが, ダランベールの定理では収束半径が求まらないことがある. 実際, $a_n = 0$ となる n が無限個ある級数に対して定理 6.4 は適用できない.

例 6.6. 次の冪級数の収束半径は 1 である:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

実際, この級数は公比 $-x$ の等比級数だから, $|x| < 1$ のとき収束, $|x| > 1$ のときは発散する.

コーシー・アダマールの定理 6.3 を適用して次のように求めることもできる: この級数は (6.1) の $a_n = (-1)^n$ の場合だが,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

³⁾Cauchy, Augustin Louis, 1789–1857; Hadamard, Jacques Salomon, 1865–1963.

⁴⁾d'Alembert, Jean Le Rond; 1717–1783.

また, ダランベールの定理 6.4 を用いれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

この場合はもちろん

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (|x| < 1)$$

である. \diamond

例 6.7. 次の冪級数の収束半径は $+\infty$ である:

$$(6.4) \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

実際, ダランベールの定理 6.4 を用いれば, 収束半径が ∞ となることがわかる. とくにこの級数の和は e^x となる (例 2.9). \diamond

例 6.8. (1) 冪級数 $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ の収束半径は 0.

(2) 多項式 $p(t)$ に対して, 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ の収束半径は 1 である.

(3) 多項式 $p(t), q(t)$ に対して冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} x^n$ の収束半径は 1 である. ただし $q(n)$ は負でない整数の根をもたないものとする. \diamond

例 6.9. 冪級数

$$(6.5) \quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\left(a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{n} & (n = 2m+1; m \text{ は負でない整数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \right)$$

の収束半径を求めよう.

無限個の a_n が 0 になるので, ダランベールの定理 6.4 は直接使えない. コーシー・アダマールの定理 6.3 を使う:

$$b_n^+ := \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq n\} = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \mid k \geq n, k \text{ は奇数}\right\}$$

とすると, 問題 IV-2 から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

となるので, 収束半径は 1 である.

ダランベールの定理 6.4 を用いて次のように収束半径を求めることもできる: s に関する冪級数

$$1 - \frac{1}{3}s + \frac{1}{5}s^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m s^m}{2m+1}$$

の収束半径は定理 6.4 から 1 なので, この級数は $|s| < 1$ なら絶対収束, $|s| > 1$ なら発散. いまこの級数の s を x^2 で置き換え, x をかければ, (6.5) が得られるので, これは $|x| < 1$ で絶対収束, $|x| > 1$ で発散する. すなわち収束半径は 1 となる (命題 6.2). \diamond

例 6.10. 冪級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

の収束半径はともに $+\infty$ である. とくにこれらの和はそれぞれ $\sin x, \cos x$ となる (例 2.10). \diamond

収束半径が r の冪級数 (6.1) の $x = \pm r$ での挙動にはさまざまな場合がある.

例 6.11 (問題 VI-3). (1) 冪級数 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ の

収束半径は 1 であり, $x = \pm 1$ で発散する.

(2) 冪級数 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ の収束半径は 1 であり $|x| < 1$ で絶対収束し, $|x| > 1$ では発散する. さらに $x = 1$ で $\log 2$ に収束 (条件収束) する (例 2.11) が, $x = -1$ では発散する (例 5.8).

(3) 例 6.9 の級数の収束半径は 1 で, $x = \pm 1$ では $\frac{\pi}{4}$ に条件収束する.

(4) 冪級数 $1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ の収束半径は 1 であり, $x = \pm 1$ で絶対収束する (例 5.8). \diamond

VI.2 冪級数が定める関数

命題 6.1 から冪級数 (6.1) が収束する範囲 I は区間となり, (6.2) は区間 I 上の関数 f を定める. とくに, 冪級数の部分和から定まる関数 f_n を用いて f を次のように表しておく:

$$(6.6) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in I); \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

補題 6.12. 式 (6.6) の状況で, 冪級数の収束半径 r が正であるとする. このとき区間 $(-r, r)$ に含まれる任意の閉区間 J に対して次が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_J |f_n - f| = 0.$$

証明. 閉区間 $J := [a, b] \subset (-r, r)$ に対して, $\delta := \frac{1}{2} \min\{r - b, a - (-r)\} > 0$ とすると, $J \subset [-r + 2\delta, r - 2\delta]$ となる. 関数の J での上限は J' での上限を超えないから, $J = [-r + 2\delta, r - 2\delta]$ で結論を示せばよい. あたえられた級数は $x = r - \delta$ で絶対収束するから, $|a_n(r - \delta)^n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). したがって, $n \geq N$ ならば $|a_n(r - \delta)^n| \leq 1$ となる番号 N がとれる. このとき, $n \geq N$ ならば, 各 $x \in J$ に対して

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k (r - \delta)^k| \left| \frac{x}{r - \delta} \right|^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{x}{r - \delta} \right|^k \leq \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \quad \left(\rho := \frac{|x|}{r - \delta} < 1 \right) \end{aligned}$$

となる. したがって $\sup_J |f_n - f| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). \square

定理 6.13. 収束半径 r が正である冪級数が (6.2) で定める関数 f は, 区間 $(-r, r)$ で連続である.

証明 . 点 $\alpha \in (-r, r)$ をひとつ固定して, $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ を示せばよい . まず $d := \frac{1}{2} \min\{r - \alpha, \alpha + r\} > 0$ とすると, α は $(-r + d, r - d)$ に含まれている . いま, 閉区間 $J := [-r + d, r - d]$ を固定しておく .

正の数 ε を任意にとると, 補題 6.12 より, 次をみたま番号 N が存在する :

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_J |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (x \in J).$$

この N に対して部分和 f_N は多項式だから連続関数 . したがって,

$$|x - \alpha| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f_N(x) - f_N(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

をみたま正の数 δ が存在する . この δ に対して $|x - \alpha| < \delta$ なら

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\alpha)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(\alpha) + f_N(\alpha) - f(\alpha)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\alpha)| + |f_N(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon \end{aligned}$$

したがって f は α で連続である . \square

例 6.11 の (2), (3), (4) のように, 収束半径 r の冪級数が $(-r, r)$ の端点で収束する場合もあるが, 定理 6.13 は端点での連続性について言及していない . 実際, ここでの証明では $\alpha = \pm r$ の場合には有効でない . しかし, 端点で冪級数が収束するならば, 冪級数が定める関数の連続性が言える :

定理 6.14 (アーベルの連続性定理⁵⁾). 冪級数 (6.2) の収束半径が r で, $x = r$ ($x = -r$) で (6.2) が収束するならば, 次が成り立つ :

$$\lim_{x \rightarrow r-0} f(x) = f(r) \quad \left(\lim_{x \rightarrow -r+0} f(x) = f(-r) \right), \quad \text{ただし } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

証明は節末に与える .

項別微分・積分 定理 6.13 から, 冪級数 (6.6) で定まる関数 f は $(-r, r)$ で連続なので, 積分可能である .

定理 6.15 (項別積分⁶⁾). 収束半径が $r (> 0)$ の冪級数で (6.2) のように定義される関数 f と任意の x ($-r < x < r$) に対して次が成り立つ :

$$\int_0^x f(t) dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

⁵⁾Abel, Niels Henrik; 1802–1829.

証明 . 式 (6.6) のように部分和 f_n をとると, 補題 6.12 から

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f_n(t) dt \right| &= \left| \int_0^x (f(t) - f_n(t)) dt \right| \leq \left| \int_0^x |f(t) - f_n(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x \sup_{[-x, x]} |f(t) - f_n(t)| dt \right| \leq \sup_{[-x, x]} |f(t) - f_n(t)| |x| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ . ここで, $f_n(x)$ は x の多項式だから, 積分公式が使えて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1}}{k} x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n. \quad \square$$

定理 6.16 (項別微分). 収束半径が $r (> 0)$ の冪級数で (6.6) のように定義される関数 f は $(-r, r)$ で微分可能で, 次が成り立つ :

$$(6.7) \quad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (-r < x < r).$$

証明 . 命題 5.16 と問題 IV-2 から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

なので, コーシー・アダマールの定理 6.3 から (6.7) の右辺の級数の収束半径は r である . そこで, この級数で与えられる関数を g とおくと, 定理 6.15 から $x \in (-r, r)$ に対して

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

なので, 微分積分学の基本定理より f は微分可能で $f'(x) = g(x)$ ($-r < x < r$) . \square

例 6.17. 級数

$$(6.8) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

の和を求めよう . まず定理 5.9 から (6.8) は収束することがわかる .

⁶⁾項別積分 (微分): integration (differentiation) by term and term.

いま, 例 6.9 の (6.5) のような冪級数を考えると, その収束半径は 1 である. したがって定理 6.16 から

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

は区間 $(-1, 1)$ で微分可能で

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \quad (-1 < x < 1).$$

したがって

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$$

であるが, $x = 1$ で級数 (6.5) は収束するのでアーベルの定理 6.14 から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} \quad \diamond$$

アーベルの定理の証明

アーベルの連続性定理 6.14 に証明を与えよう. 変数 x の冪級数の収束半径が $r (> 0)$ ならば $x = rt$ と置き換えれば収束半径 1 の冪級数が得られるので, 最初から収束半径 r は 1 としておいてよい. また, 与えられた収束半径 1 の冪級数が $x = -1 = -r$ で収束するならば, $x = -u$ と置き換えれば $u = 1$ で収束する冪級数が得られるので, 次の定理を証明すればよいことになる:

定理 6.18. 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で, さらに $x = 1$ とおいた級数が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = X \quad \text{ただし } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad X := \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

証明. 数列 $\{a_n\}$ の部分数列を

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

とおく. すると仮定より $\{\sigma_n\}$ は収束するので, 有界である (補題 4.4 の (1)). したがって, $\{\sigma_n - X\}$ も有界だから

$$(6.9) \quad |\sigma_n - X| \leq A \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をみたす正の数 A が存在する.

正の数 ε が与えられたとする. このとき, $\{\sigma_n\}$ は X に収束するから, 番号 M で次を満たすものをとることができる:

$$(6.10) \quad n \geq M \quad \text{ならば} \quad |\sigma_n - X| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

また, 式 (6.9) の A と (6.10) の M に対して

$$(6.11) \quad \delta = \frac{\varepsilon}{4(M+1)A}$$

とおいておく.

いま, (6.10) の M に対して $N > M + 2$ なる番号 N をとると, $a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ ($n \geq 1$) だから, $0 < x < 1$ をみたす x に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n x^n &= \sigma_0 + \sum_{n=1}^N (\sigma_n - \sigma_{n-1}) x^n = \sigma_0 + \sum_{n=1}^N \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^N \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n (x^n - x^{n+1}) + \sigma_N x^N = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^n + \sigma_N x^N \\ &= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=0}^{N-1} X x^n \right) + \sigma_N x^N \\ &= (1-x) \left(\sum_{n=0}^M (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\ &\quad + (1-x) X \sum_{n=0}^{N-1} x^n + \sigma_N x^N \\ &= (1-x) \left(\sum_{n=0}^M (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\ &\quad + X(1-x) \frac{1-x^N}{1-x} + \sigma_N x^N \\ &= (1-x) \left(\sum_{n=0}^M (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \end{aligned}$$

$$+ X + (\sigma_N - X)x^N.$$

したがって, $0 < x < 1$ ならば, (6.9), (6.10), (6.11) を用いて

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^N a_n x^n - X \right| \\ & \leq (1-x) \left(\sum_{n=0}^M |\sigma_n - X| x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} |\sigma_n - X| x^n \right) + |\sigma_N - X| x^N \\ & < (1-x)A \sum_{n=0}^M x^n + (1-x) \sum_{n=M+1}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4} x^n + \frac{\varepsilon}{4} x^N \\ & \leq (1-x)A(M+1) + (1-x) \frac{\varepsilon}{4} x^{M+1} \frac{1-x^{N-M-1}}{1-x} + \frac{\varepsilon}{4} \\ & \leq (1-x) \frac{\varepsilon}{4\delta} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

とくに, $N \rightarrow \infty$ とすると左辺は $|f(x) - X|$ に収束するので,

$$|f(x) - X| \leq \frac{\varepsilon}{4} \left(2 + \frac{1-x}{\delta} \right) \quad (0 < x < 1)$$

が成り立つ. したがって $0 < 1-x < \delta$ をみたく任意の x に対して

$$|f(x) - X| \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

が得られた. ここで $\varepsilon > 0$ は任意だったから,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = X$$

である.

□

問 題 VI

- VI-1 例 6.8 を確かめなさい.
 VI-2 例 6.10 を確かめなさい.
 VI-3 例 6.11 を確かめなさい.
 VI-4 例 6.17 に倣って, 級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

の和を求めなさい.

- VI-5 例 6.17 に倣って, 等式

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + 3 \log 2)$$

を示しなさい (例 5.10 (3)).

問題の解答とヒント

問題の解答, 解答の概略あるいはヒントを与える. これらは完全なものではないので, 行間を埋めて完全な解答を作ることを試みよ. 誤りを見つけたら指摘してほしい.

問題 I (11 ページ)

- I-1** • $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $b = 5$ として平均値の定理 1.4 を適用すると, $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, $4 < c < 5$ をみたく c が存在する. したがって

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2\sqrt{c}} < 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25,$$

$$\sqrt{5} > 2 + \frac{1}{2\sqrt{5}} > 2 + \frac{1}{2 \times 2.25} = 2 + \frac{1}{4.5} > 2 + \frac{1}{5} = 2.2$$

が得られる. ここで, 第二の不等式では第一の不等式の結果を用いた. したがって $2.2 < \sqrt{5} < 2.25$ である.

- $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = 0.1$ に対して平均値の定理 1.4 を適用すると,

$$\frac{\sin 0.1 - \sin 0}{0.1 - 0} = \cos c \quad \text{すなわち} \quad \sin 0.1 = 0.1 \cos c \quad (0 < c < 0.1)$$

をみたく c が存在する. 区間 $[0, \pi]$ で $\cos x$ は単調減少だから,

$$\sin 0.1 = 0.1 \cos c < 0.1 \cos 0 = 0.1,$$

$$\begin{aligned} \sin 0.1 > 0.1 \cos 0.1 &= 0.1\sqrt{1 - 0.1\sin^2 0.1} > 0.1\sqrt{1 - 0.1^2} \\ &= 0.1\sqrt{0.99} > 0.099. \end{aligned}$$

ここで 2 番目の不等式は $0 < y < 1$ のとき $\sqrt{y} > y$ であることを用いた. したがって $0.099 < \sin 0.1 < 0.1$ なので $\sin 0.1$ の近似値は 0.09 である.

- $f(x) = \tan x$, $a = 0$, $b = 0.1$ に対して平均値の定理 1.4 を適用すると,

$$\frac{\tan 0.1 - \sin 0}{0.1 - 0} = 1 + \tan^2 c \quad \text{すなわち} \quad \tan 0.1 = 0.1(1 + \tan^2 c)$$

かつ $0 < c < 0.1$ をみたく c が存在する. $[0, \pi]$ で $\tan x$ は単調増加だから,

$$\tan 0.1 = 0.1(1 + \tan^2 c) > 0.1(1 + \tan^2 0) = 0.1,$$

$$\sin 0.1 < 0.1(1 + \tan^2 0.1) < 0.1(1 + 0.1^2) = 0.1(1.01) = 0.101.$$

したがって $0.1 < \tan 0.1 < 0.101$ なので $\tan 0.1$ の近似値は 0.10 である.

- I-2** 午前 $10 + x$ 時に工太郎がいる地点の東京 IC からの道のりを $f(x)$ km として, f に平均値の定理を適用しなさい.

- I-3** 最初の等号から順番に, $(x-a)/(x-a) = 1$ /積の極限の公式/ 微分可能性 (微分係数の定義) / $f(a) - f(a) = 0$ /和の極限の公式/ 上の等式/ $0 + X = X$.

- I-4** 関数 f は $[a, b]$ で連続だから, $a \leq x \leq b$ を満たす任意の x に対して $[a, x]$ で積分可能. そこで

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

とおくと, F は $[a, b]$ で微分可能で,

$$(*) \quad F'(x) = f(x), \quad F(a) = 0, \quad F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

をみたしている. この F に対して平均値の定理 1.4 を適用すると,

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c) \quad (a < c < b)$$

をみたく c が存在する. この c に対して (*) から

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c) \quad (a < c < b).$$

- I-5** $f(x) = -(x - \frac{1}{2})^2$; $f(x) = x$; $f(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 0, 1) \end{cases}$

- I-6** 定理 1.4: $F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ とすると, f が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能であるから F も同じ性質をもつ. さらに $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ だから, ロルの定理 (補題 1.15) より $F'(c) = 0$, $a < c < b$ をみたく c が存在する. この c に対して

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つので, これが求める c である.

定理 1.16: $g(b) \neq g(a)$ なので, $F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ とおくと, f, g が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能であるから F も同じ性質をもつ. さらに $F(a) = F(b) = 0$ が成り立つから, ロルの定理 (補題 1.15) から

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c), \quad a < c < b$$

をみたく c が存在する. 仮定より $g'(c) \neq 0$ だから, この c が結論をみたく.

- I-7** $0 < u < h$ をみたく各 u に対して, f, g に対して区間 $[a, a + u]$ でコーシーの平均値の定理 1.16 を適用すると,

$$\frac{f'(c_u)}{g'(c_u)} = \frac{f(a + u) - f(a)}{g(a + u) - g(a)} = \frac{f(a + u)}{g(a + u)}, \quad a < c_u < a + u$$

を満たす c_u が存在する. この式の両辺で $u \rightarrow +0$ とすると, $c_u \rightarrow a + 0$, したがって仮定より左辺の極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} (f'(x)/g'(x))$ は存在して, 右辺の極限に等しい.

- I-8** $-\frac{1}{2}, \log \frac{5}{3}, +\infty$.

I-9 区間 $0 \leq t \leq 1$ で関数 F を

$$F(t) := \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^k \right) + (1-t)^{n+1} \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right)$$

で定めると $f^{(k)}$ が微分可能であることから F は微分可能で、

$$\begin{aligned} F'(t) &:= \sum_{k=0}^n \left(\frac{h f^{(k+1)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^k + \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!} (-k)(1-t)^{k-1} h^k \right) \\ &\quad - (n+1)(1-t)^n \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^{k+1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a+th)}{(k-1)!} (1-t)^{k-1} h^k \\ &\quad - (n+1)(1-t)^n \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^{k+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^{k+1} \\ &\quad - (n+1)(1-t)^n \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a+th)}{n!} (1-t)^n h^{n+1} \\ &\quad - (n+1)(1-t)^n \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right). \end{aligned}$$

一方、

$$F(0) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right) + \left(f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right) = f(a+h)$$

$$F(1) = f(a+h)$$

であるから、 F にロルの定理を適用すると、 $F'(\theta) = 0$, $0 < \theta < 1$ をみたす θ が存在する。この θ に対して

$$F'(\theta) = (n+1)(1-\theta)^n \times \left[\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!} h^{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k - f(a+h) \right].$$

$1-\theta \neq 0$ だから、この θ が結論をみたす。

I-10 多項式 $f(x)$ を

$$f(x) := (1+x)^n - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

とおくと、この次数は高々 n である。いま $x=0$ を代入すると

$$f(0) = 1 - \binom{n}{0} = 0.$$

また、

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} - \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

なので $x=0$ を代入すると

$$f'(0) = n - \binom{n}{1} = n - n = 0.$$

さらに続けて $m=1, \dots, n$ に対して

$$f^{(m)}(x) = n(n-1)\dots(n-m+1)(1+x)^{n-m} - \sum_{k=m}^n k(k-1)\dots(k-m+1) \binom{n}{k} x^{k-m}$$

なので

$$\begin{aligned} f^{(m)}(0) &= n(n-1)\dots(n-m+1) - m(m-1)\dots 1 \binom{n}{m} \\ &= n(n-1)\dots(n-m+1) - m! \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = 0. \end{aligned}$$

したがって $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$ なので $f(x)$ は恒等的に 0 である。

- I-11
- $\sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}h - \frac{1}{8\sqrt{a}^3}h^2 + \frac{1}{16\sqrt{a}\theta h^5}h^3$ ($0 < \theta < 1$).
 - $e^h = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}e^{\theta h}h^3$ ($0 < \theta < 1$).
 - $e^{a+h} = e^a \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} + \frac{e^{a+\theta h}h^{n+1}}{n+1!}$ ($0 < \theta < 1$).
 - $\cos h = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} h^{2m} + \frac{(-1)^k h^{2k}}{(2k)!} \cos(\theta h)$ ($0 < \theta < 1$).
 - $\sin h = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} h^{2m+1} + \frac{(-1)^k h^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin(\theta h)$ ($0 < \theta < 1$).
 - $\tan h = h + \frac{h^3}{3} + \frac{1}{3}\phi(\theta h)$ ($0 < \theta < 1$). ただし $\phi(t) = t(1+t^2)(2+3t^2)$.

- $\tan^{-1} h = h - \frac{h^3}{3} + \frac{1-10(\theta h)^2+5(\theta h)^4}{5(1+(\theta h)^2)^5} (0 < \theta < 1)$
- $\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4(1+\theta h)^4} (0 < \theta < 1)$
 $\log(1+h) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} h^k}{k} + \frac{(-1)^n h^{n+1}}{(n+1)(1+\theta h)^{n+1}} (0 < \theta < 1)$
- $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} h^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} h^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4}{24} (1 + \theta h)^{\alpha-4} (0 < \theta < 1)$
 $(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} h^k + \binom{\alpha}{n+1} \frac{h^{n+1}}{(1+\theta h)^{\alpha-n-1}} (0 < \theta < 1).$

I-12 3.1622 までは求まる .

- I-13
- $\sqrt{1.1} = 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.01}{8} + \frac{5(0.1)^3}{16} (1+0.1\theta)^{-5/2} (0 < \theta < 1).$
 - 1.04875
 - $0 < R_3(0.1) < 6.25 \times 10^{-5}$ から $1.04875 < \sqrt{1.1} < 1.04881$ なので , $\sqrt{1.1}$ の近似値は 1.048 .
 - 1.0488 までは求まる .

問題 II (23 ページ)

- II-1 (1) $k > n$ のとき $f^{(k)}(x)$ は恒等的に 0 となることとテイラーの定理 1.19 から結論が従う .
- (2) $f(x) = 18 + 51(x-2) + 64(x-2)^2 + 37(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5$ だから , $f(\sqrt{2}+2) = 186 + 129\sqrt{2}, 23.77801.$

II-2 $1/2; 1/12; -1/6; 2/5; 2/3; -1/2; -1/6$

II-3 $a = 2, b = 1, \text{極限值 } 11/60.$

II-7 $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$

問題 III (35 ページ)

- III-1 (1) 任意の実数 x に対して $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$. したがって f は 0 で最小値をとる .
- (2) 例 3.2 の 2 つめの例に倣って

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ e^{-1/|x|} & (x < 0) \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -e^{-1/|x|} & (x < 0) \end{cases}$$

とおくと , f も g も実数全体で C^∞ -級で , $x = 0$ において全ての階数の微分係数が 0 となっている . 一方 f は 0 で極小値をとり , $-f$ は 0 で極大値をとる . また g は単調増加である . すなわち , 0 においてすべての階数の微分係数が一致していても , さまざまな場合がありうる .

- (3) 任意の 0 でない実数 x に対して $f(x) = |x| > 0 = f(0)$ である .

III-2 グラフ省略 . $x = \pm 1$ で極小値 (最小値でもある) , $x = 0$ で極大値 (最大値ではない) をとる .

- III-3 (1) (定理 A の逆 : $f'(a) = 0$ ならば f は a で極値をとる) $f(x) = x^3$ とすると $f'(0) = 0$ であるが , f は単調増加なので 0 極値をとらない .
- (2) (定理 C の逆 : f が a で極小値をとるならば $f'(a) = 0, f''(a) > 0$) $f(x) = x^4$ とすると f は 0 で極小値 (実は最小値) をとるが , $f'(0) = f''(0) = 0$.

- III-4
- $9p^2 - 32q < 0$ のとき , 0 で極小値をとる .
 - $p \neq 0, q = 0$ のとき $x = -3p/4$ で極小値をとる .
 - $9p^2 - 32q = 0, p \neq 0$ のとき , $x = 0$ で極小値をとる .
 - $9p^2 - 32q > 0, p > 0, q > 0$ のとき , $x = 0$ で極小値 , $x = \frac{1}{8}(-3p - \sqrt{9p^2 - 32q})$ で極大値 , $x = \frac{1}{8}(-3p + \sqrt{9p^2 - 32q})$ で極小値をとる .
 - $9p^2 - 32q > 0, p < 0, q > 0$ のとき , $x = \frac{1}{8}(-3p - \sqrt{9p^2 - 32q})$ で極小値 , $x = \frac{1}{8}(-3p + \sqrt{9p^2 - 32q})$ で極大値 , $x = 0$ で極小値をとる .
 - $9p^2 - 32q > 0, q < 0$ のとき , $x = \frac{1}{8}(-3p - \sqrt{9p^2 - 32q})$ で極小値 , $x = 0$ で極大値 , $x = \frac{1}{8}(-3p + \sqrt{9p^2 - 32q})$ で極小値をとる .
 - $p = q = 0$ のとき $x = 0$ で極小値をとる .

これですべての場合を尽くしていることを確かめよ .

III-5 $m = f'(a) < 0$ において , $m > 0$ の場合 , テイラーの定理 2.1 より ,

$$(*) \quad f(a+h) = f(a) + mh + R_2(h) \quad \text{とおけば} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_2(h)}{h} = 0$$

となる . この $|R_2(h)|$ は h が十分小さければ $|mh|$ よりもずっと小さいので , 十分小さい h の範囲では無視してよい . したがって

$$f(a+h) - f(a) \doteq mh \quad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

であるが , $m < 0$ だから , この式の右辺は $h > 0$ のとき負 , $h < 0$ のとき正になる . したがって , h が十分小さいときは

$$f(a+h) < f(a) \quad (h > 0 \text{ のとき}); \quad f(a+h) > f(a) \quad (h < 0 \text{ のとき})$$

となるので , どんな小さい ε をとって $0 < |h| < \varepsilon$ ならば $f(a+h) > f(a)$, “ $0 < |h| < \varepsilon$ ならば $f(a+h) < f(a)$ ” のいずれも成り立たせることはできない . すなわち f は $x = a$ で極値をとらない .

III-6 $f''(a) = m > 0$ の場合を考える . 仮定より $f'(a) = 0$ なのでテイラーの定理 2.1 から

$$f(a+h) - f(a) = \frac{m}{2}h^2 + R_3(h) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_3(h)}{h^2} = 0$$

が成り立つ . とくに $h \rightarrow 0$ で $R_3(h)/h^2 \rightarrow 0$ なので ,

$$-\delta < h < \delta \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{R_3(h)}{h^2} \right| < \frac{m}{4}$$

を満たす正の数 δ がとれる . このとき区間 $(-\delta, \delta)$ に含まれる 0 でない h に対して

$$f(a+h) - f(a) = \frac{m}{2}h^2 + R_4(h) \geq \frac{m}{2}h^2 - |R_4(h)| > \frac{m}{2}h^2 - \frac{m}{4}h^2 = \frac{m}{4}h^2 > 0.$$

これは f が 0 で極小値をとることを意味している .

次に $f''(a) = m < 0$ の場合 , テイラーの定理 2.1 から

$$f(a+h) - f(a) = \frac{m}{2}h^2 + R_3(h) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_3(h)}{h^2} = 0$$

が成り立つ . とくに $h \rightarrow 0$ で $R_3(h)/h^2 \rightarrow 0$ なので ,

$$-\delta < h < \delta \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{R_3(h)}{h^2} \right| < \frac{-m}{4}$$

を満たす正の数 δ がとれる . このとき区間 $(-\delta, \delta)$ に含まれる 0 でない h に対して $m < 0$ に注意すれば

$$f(a+h) - f(a) = \frac{m}{2}h^2 + R_4(h) \leq \frac{m}{2}h^2 + |R_4(h)| < \frac{m}{2}h^2 - \frac{m}{4}h^2 = \frac{m}{4}h^4 < 0.$$

これは f が 0 で極大値をとることを意味している .

III-7 極大値を取る場合も , 極小値を取る場合も , 極値をとらない場合もある . それぞれの例を作ってみよ .

さらに , $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), $f^{(n)}(a) \neq 0$ ならば

- n が奇数のとき , 極値をとらない .
- n が偶数のときは極値をとる .

テイラーの定理 2.1 を用いて理由を説明してみよ .

III-8 Yes/Yes/No/No/Yes.

III-9 証明の概略のように , 平方完成により

$$\varphi(h, k) = \begin{cases} A \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}k^2 & (A \neq 0) \\ C \left(k + \frac{B}{C}h \right)^2 + \frac{AC-B^2}{C}h^2 & (C \neq 0) \\ 2Bhk & (A = C = 0) \end{cases}$$

となる .

- $A > 0, AC - B^2 > 0$ ならば $(AC - B^2)/A > 0$ なので ,

$$\varphi(h, k) = A \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}k^2 \geq 0.$$

とくに等号が成立するのは $h + (B/A)k = k = 0$ が成立するときだから $(h, k) = (0, 0)$. したがって $(h, k) \neq (0, 0)$ ならば $\varphi(h, k) > 0$.

一方 , 任意の $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して $\varphi(h, k) > 0$ とする . もし $A = 0$ ならば任意の h に対して $\varphi(h, 0) = 0$ なので $A \neq 0$ である . さらに $h \neq 0$ なら $\varphi(h, 0) = Ah^2 > 0$ なので $A > 0$ でなければならない . このとき , $k \neq 0$ なら $\varphi(-B/A k, k) = (AC - B^2)k^2/A > 0$ で $A > 0$ だから $AC - B^2 > 0$ でなければならない .

- $A < 0, AC - B^2 > 0$ ならば $(AC - B^2)/A < 0$ なので ,

$$\varphi(h, k) = A \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}k^2 \leq 0$$

で等号成立は $(h, k) = (0, 0)$ のときのみだから , したがって $(h, k) \neq (0, 0)$ ならば $\varphi(h, k) < 0$.

一方 , 任意の $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して $\varphi(h, k) < 0$ とする . 上と同様に $A \neq 0$ としてよいが , さらに $h \neq 0$ なら $\varphi(h, 0) = Ah^2 < 0$ なので $A < 0$. このとき , $k \neq 0$ なら $\varphi(-B/A k, k) = (AC - B^2)k^2/A < 0$ で $A < 0$ だから $AC - B^2 > 0$.

- 問題の順番と逆だが $AC - B^2 = 0$ の場合を考える . もし $A = C = 0$ なら $B = 0$ であることに注意すれば ,

$$\varphi(h, k) = \begin{cases} A \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 & (A \neq 0) \\ C \left(k + \frac{B}{C}h \right)^2 & (C \neq 0) \\ 0 & (A = C = 0) \end{cases}$$

なので , $\varphi(h, k)$ は符号を変えない . さらに $A \neq 0$ のときは $\varphi(-B/A k, k) = 0$, $C \neq 0$ のときは $\varphi(h, -B/C h) = 0$, $A = C = 0$ のときは任意の (h, k) に対して $\varphi(h, k) = 0$ となる .

- $AC - B^2 < 0$ とする . $A \neq 0$ のときは , $(AC - B^2)/A$ は A と逆の符号をもつので ,

$$\varphi(h, k) = A \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}k^2$$

から $\varphi(h, 0)$ と A の符号は一致し , $\varphi(-B/A k, k)$ と A は反対の符号をとる . $C \neq 0$ のときも同様 . $A = C = 0$ のときは $\varphi(h, k) = 2Bhk$ であるが , $AC - B^2 = -B^2 < 0$ なので $B \neq 0$. このとき $\varphi(t, t) = 2Bt^2$ と $\varphi(t, -t) = -2Bt^2$ は異なる符号をもつ .

逆の主張は , 対偶をとって $AC - B^2 \geq 0$ ならば $\varphi(h, k)$ が符号を変えないことを示せばよいが , それは上の 3 つの場合で示されている .

- III-10**
- $f_x(x, y) = 3x^2 - y$, $f_y(x, y) = -x + 3y^2$ なので $f_x = f_y = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ のとき (方程式 $f_x = f_y = 0$ はほかに虚数の解をもつが , 極値問題は値の大小を議論しているので , 虚数を考えないことにしている .)
 - 上のことから点 $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 以外では f は極値をとらない (定理 3.11) . さらに $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -1$, $f_{yy} = 6y$ なので , 定理 3.12 から
 - $(x, y) = (0, 0)$ のとき $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0 - (-1)^2 = -1 < 0$ なので f はこの点で極値をとらない .
 - $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ のとき $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$ なので , f はこの極小値をとる . 極小値は $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$.

III-11 $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ のとき . $a, b > 0$ に注意すれば

- $(0, 0)$ で極小値 0 をとる .
- $0 < a < b$ のとき $(\pm 1, 0)$ で極大値 a/e をとる .

- $0 < b < a$ のとき $(0, \pm 1)$ 極大値 b/e をとる.

III-12 関数 $f_x(x, y) = f_y(x, y) = (0, 0)$ となるのは $(x, y) = (0, -\frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (0, 0)$ のとき.

- $(0, -\frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, 0)$ で極小値 $-27/256$ をとる.
- それ以外の点では極値を取らない.

実際 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ では定理 3.12 が適用できて、極値をとらないことがわかる. 点 $(0, 0)$ は定理 3.12 が適用できない場合なので、個別に考える必要がある. ここで $f(x, -x) = -x^3(2-x^4)$ は $x=0$ を含む区間で減少する. すなわち $(0, 0)$ にいくらでも近い点 (x, y) で $f(x, y) > f(0, 0)$ となるものも $f(x, y) < f(0, 0)$ となるものもある. すなわち f は $(0, 0)$ で極値をとらない.

III-13 関数 $f(x, y)$ が調和関数であるとは $f_{xx} + f_{yy} = 0$ が成り立つことである. とくに $f_{yy} = -f_{xx}$ なので、もし $f_{xx} \neq 0$ ならば

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -f_{xx}^2 - f_{xy}^2 < 0$$

となり、定理 3.12 から極値をとれないことがわかる (実は、 $f_{xx} \neq 0$ の仮定がなくても極値をとらないことを示すことができるが、この授業の範囲を超える).

問題 IV (47 ページ)

IV-1 (1) $h := r - 1$ とすると、これは正の数である. ここで二項定理 (問題 I-10) から

$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k = 1 + nh + \binom{n}{2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \geq nh.$$

右辺は $n \rightarrow \infty$ で正の無限大に発散するから補題 4.6 の (4) から $r^n \rightarrow +\infty$ である.

- (2) 任意の n に対して $r^n = 1$ だから、補題 4.5 (1) から $r^n \rightarrow 1$ である.
- (3) $r = 0$ のときは $r^n = 0$ なので補題 4.5 (1) から $r^n \rightarrow 0$ である. $r \neq 0$ のときは $0 < |r| < 1$ なので、 $1/|r| > 1$. したがって、この問題の IV-1(1) から $1/|r|^n \rightarrow +\infty$ なので、補題 4.4 の (3) から $|r|^n \rightarrow 0$. したがって補題 4.6 の (3) から $r^n \rightarrow 0$ である.
- (4) $f(x) = |x|$ は連続関数だから、 $\{r^n\}$ が α に収束するなら $\{f(r^n)\}$ は $f(\alpha) = |\alpha|$ に収束する. ところが $f(r^n) = |r|^n$ で、 $|r| > 1$ であるから、この問題の IV-1(1) から $\{f(r^n)\}$ は正の無限大に発散. したがって、 $\{r^n\}$ は収束しない、すなわち発散する. もし $\{r^n\}$ が正の無限大に発散すると仮定すると、定義 4.3 で $(M = 0$ として)、「 $n \geq N$ をみたく任意の n に対して $r^n > 0$ となる」ような番号 N が存在するはず. とくに $r^N > 0$ であるが、 $r < 0$ なので $r^{N+1} = r \cdot r^N < 0$ となり矛盾が生じる. 負の無限大の場合も同様. したがって $\{r^n\}$ は発散するが、正負いずれの無限大にも発散しない.

IV-2 まず $n \geq 1$ ならば $\sqrt[n]{n} \geq 1$ である. 一方、二項定理 (問題 I-10) から

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &= 1 + n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{2}{\sqrt{n^2}} + \dots + \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{n}^n} \\ &\geq 1 + \sqrt{2}\sqrt{n} + (n-1) \geq n. \end{aligned}$$

したがって、両辺の n 乗根をとると、

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{n} \geq 1.$$

そこで補題 4.6 の (2) を適用すれば結論が得られる.

IV-3 各 n に対して p_n が負でないことから、

$$a_{n+1} = a_n + \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \geq a_n.$$

したがって $\{a_n\}$ は単調非減少. また $p_n \leq 9$ であることから、各 n に対して

$$a_n \leq 9 \sum_{k=0}^n 10^{-k} = 9 \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) / \left(1 - \frac{1}{10}\right) \leq 9 / \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 10$$

なので $\{a_n\}$ は上に有界. したがって、定理 4.12 より $\{a_n\}$ は収束する.

IV-4 (1) 定義 4.3 から直接示そう: 任意の実数 M に対して、番号 N を (a) $M \leq 0$ のときは $N = 1$ とすると、 $n \geq N = 1$ をみたく全ての番号 n に対して $n^s \geq 1 > M$. (b) $M > 0$ のときは $N = M^{1/s} + 1$ とすると、 $n \geq N$ をみたく番号 n に対して $n^s \geq N^s = (M^{1/s} + 1)^s > (M^{1/s})^s = M$. これらから定義 4.3 の条件が満たされることがわかる. (2) $s = 0$ のときは $n^s = 1$ ($n \geq 1$) なので結論が成り立つ. (3) $\{1/n^s\}$ は (1) より正の無限大に発散するので、補題 4.4 の (3) から結論が得られる.

IV-5 まず数列 $\{a_n\}$ の単調性を示そう. $a_1 = 2, a_2 = 9/4 > 1 = a_1$ であるが、 $n \geq 3$ として、

$$\alpha := 1 + \frac{1}{n+1}, \quad \beta := 1 + \frac{1}{n}$$

とする. このとき $\alpha < \beta$ に注意すると、 $1 \leq m \leq n$ なる m に対して

$$\begin{aligned} \alpha^{m+1} - \beta^m &= \alpha^m \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \beta^m = \alpha^m - \beta^m + \frac{\alpha^m}{n+1} \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\beta + \dots + \beta^{m-1}) + \frac{\alpha^m}{n+1} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)}(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\beta + \dots + \beta^{m-1}) + \frac{\alpha^m}{n+1} \\ &\geq \frac{-1}{n(n+1)}m\beta^{m-1} + \frac{\alpha^m}{n+1} \\ &\geq \frac{-1}{n(n+1)}n\beta^{m-1} + \frac{\alpha^m}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}(\alpha^m - \beta^{m-1}). \end{aligned}$$

したがって,

$$a_{n+1} - a_n$$

すなわち $a_{n+1} - a_n > 0$ が成り立つので $\{a_n\}$ は単調増加.

次に $\{a_n\}$ が上に有界であることを示す: 二項定理 (問題 I-10) を用いて

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}.$$

ここで, $2 \leq k \leq n$ なる番号 k に対して

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \\ &\leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

したがって,

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2 + 1 = 3.$$

すなわち $\{a_n\}$ のすべての項は 3 以下なので上に有界.

以上と定理 4.12 より $\{a_n\}$ は収束することがわかる.

IV-6 a に収束する $I \setminus \{a\}$ の数列 $\{x_n\}$ を任意にとる. このとき, $x \rightarrow a$ で $f(x)$ が α に, $g(x)$ が β に収束していることがわかっているので, 定理 4.21 から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \beta$$

となることがわかる. したがって, 数列の極限の公式 (補題 4.5) を用いると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \alpha + \beta$$

となる. $\{x_n\}$ は任意にとったのだから, 定理 4.21 から

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$$

であることが示された. ほかも同様.

IV-8 まず存在することを示す: 関数 $f(x) = x^n - \alpha$ ($0 \leq x \leq \beta$) を考える. ただし $\beta = \max\{\alpha, 1\}$ である. $\alpha = 1$ のときは $x = 1$ が根であるから, この関数は $0 \leq x \leq \beta$ で連続で,

$$f(0) = -\alpha < 0, \quad f(\beta) = \begin{cases} \alpha^n - \alpha = \alpha(\alpha^{n-1} - 1) > 0 & (\alpha > 1) \\ 1 - \alpha > 0 & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$$

なので, 中間値の定理から $f(c) = 0$ をみたす c ($0 < c < \beta$) が存在する.

次にただ一つであることを示す. そのためには, $c_1^n = \alpha, c_2^n = \alpha$ ($c_1, c_2 > 0$) ならば $c_1 = c_2$ であることを示せばよい. これは

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha - \alpha = c_2^n - c_1^n \\ &= (c_2 - c_1)(c_2^{n-1} + c_2^{n-2}c_1 + \cdots + c_1^{n-1}) \end{aligned}$$

と, 負でない整数 k, l に対して $c_2^k c_1^l > 0$ であることからわかる.

IV-9 (問題訂正あり, 2016 年 1 月 19 日の提示資料参照)

- (1) $y \in Y$ とすると, $f(a) \leq y \leq f(b)$ である. とくに y が区間の端点のときは, 確かに $y = f(a)$ または $y = f(b)$ と書けているので, 条件をみたす x は存在する. また $f(a) < y < f(b)$ の場合は, 連続関数 $F(x) := f(x) - y$ ($a \leq x \leq b$) に対して中間値の定理を適用すれば, 条件をみたす x の存在が従う. 次に, そのような x がただ一つであることを示す: $f(x_1) = f(x_2) = y$ が成り立っているとき, もし $x_1 < x_2$ ならば, 単調性より $f(x_1) < f(x_2)$ となり仮定に反するので $x_1 \geq x_2$ である. また $x_1 > x_2$ なら $f(x_1) > f(x_2)$ となり仮定に反するので, $x_1 \leq x_2$. したがって $x_1 = x_2$ である.
- (2) $y_0 \in [f(a), f(b)]$ に対して, f^{-1} が y_0 で連続であることを示せばよい. まず $x_0 = f^{-1}(y_0)$ とおき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $x_- = x_0 - \varepsilon, x_+ = x_0 + \varepsilon$ とおき, $y_- := f(x_-), y_+ := f(x_+)$ とおく. f は単調増加だったから, $y_- < y_0 = f(x_0) < y_+$ なので, $\delta = \min\{y_+ - y_0, y_0 - y_-\}$ とおくと, これは正の数で, $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ ならば $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ となることを f の単調性から示すことができる.

IV-10 $Y = \{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ なので, $f(\gamma) = \eta$ ならば $\eta \in Y$. ここで $\eta = \sup Y$ なので, 任意の Y の要素 y は $y \leq \eta$ をみたす. 任意の Y の要素 y は $y = f(x)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$) と書けるから, 任意の x に対して $f(x) \leq \eta = f(\gamma)$. すなわち f は γ で最大値をとる.

問題 V (60 ページ)

V-1 (1) 正しい. 定理 5.2.

(2) 正しくない. 反例はたとえば $a_n = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$). 例 5.4.

V-2 任意の正の数 ε をとる. このとき, $\{p_n\}$ は c に収束するから, ある番号 N_0 で「 $n \geq N_0$ ならば $|p_n - c| < \varepsilon$ 」となるものがとれる. そこで, $N = N_0$ とすると, $n \geq N$ ならば $n+1 \geq N = N_0$ だから $|q_n - c| = |p_{n+1} - c| < \varepsilon$.

V-3 • $p < -1$ のとき, $p+1 < 0$ であることに注意しておく. 各 $n \geq 2$ に対して $n^p \leq x^p$ ($n-1 \leq x \leq n$) であるから, 各番号 $N \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n^p &= 1 + \sum_{n=2}^N n^p = 1 + \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n n^p dx \\ &\leq 1 + \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n x^p dx = 1 + \int_1^N x^p dx = 1 + \frac{1}{p+1} (N^{p+1} - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{-(p+1)} - \frac{N^{p+1}}{-(p+1)} \leq 1 + \frac{1}{-(p+1)}. \end{aligned}$$

右辺は N によらないから, $s_N = \sum_{n=1}^N n^p$ で与えられる数列 $\{s_N\}$ は上に有界. また $n^p \geq 0$ なので $\{s_N\}$ は単調非減少. したがって定理 4.12 から $\{s_N\}$ は収束する.

- $-1 < p < 0$ のとき, $p+1 > 0$ に注意する. 各 $n \geq 1$ に対して $n^p \geq x^p$ ($n \leq x \leq n+1$) であるから, 各番号 N に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n^p &= 1 + \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} n^p dx \\ &\geq \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} x^p dx = \int_1^{N+1} x^p dx = \frac{1}{p+1} ((N+1)^{p+1} - 1). \end{aligned}$$

右辺は $N \rightarrow \infty$ のときに発散するから部分和は発散する.

- $p = -1$ のとき, $n \leq x \leq n+1$ に対して $n^{-1} \geq x^{-1}$ だから, 上と同様にして

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) - 1 \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty).$$

- $p \geq 0$ のときは n^p が 0 に収束しないので, 与えられた級数は発散する.

V-4 (1) $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ だから, 第 N 項までの和は $\sqrt{N+1} - 1$ となるので, 与えられた級数は $+\infty$ に発散する.

(2) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ なので N 項までの和は $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right)$.

したがって, 与えられた級数の和は $1/4$.

(3) 任意の正の整数 N と実数 x に対して, 等比級数の和の公式

$$1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^N x^{2N} = \frac{1 - (-x^2)^{N+1}}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{(-x^2)^{N+1}}{1 + x^2}.$$

したがって

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^N x^{2N} + \frac{(-x^2)^{N+1}}{1 + x^2}.$$

この両辺を区間 $[0, X]$ で積分すると

$$\tan^{-1} X = X - \frac{1}{3} X^3 + \dots + \frac{(-1)^N}{2N+1} X^{2N+1} + R_N(X), \quad R_N(X) = \int_0^X \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} dx.$$

ここで

$$0 \leq |R_N(X)| \leq \int_0^X \frac{x^{2N+1}}{1+x^2} dx \leq \int_0^X x^{2N+1} dx = \frac{X^{2N+2}}{2N+2}.$$

とくに $X \leq 1$ なら右辺 $\rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) だから,

$$\tan^{-1} X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} X^{2n+1} \quad (0 \leq X \leq 1)$$

が成り立つ (もちろん $-1 \leq X \leq 0$ でも同じ式が成り立つ.) ここで $X = 1$ とすれば

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

V-5 (1) $|r| = 1/(1+h)$ とおくと $h > 0$ である. ここで二項定理 (問題 I-10) を用いると

$$(1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} h^2.$$

したがって,

$$|a_n| = n|r|^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} h^2} = \frac{2h^2}{n-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(2) $|r| \geq 1$ のとき, $|a_n| = n|r|^n \geq n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) なので, $\{a_n\}$ は発散する.

(3) • $r \neq 1$ のとき, 部分和 $s_n := \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n kr^k$ に対して

$$\begin{aligned} (1-r)s_n &= \left(\sum_{k=0}^n kr^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n kr^{k+1} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n kr^k \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)r^k \right) \\ &= 0 + \left(\sum_{k=1}^n kr^k \right) - \left(\sum_{k=1}^n (k-1)r^k \right) - nr^{n+1} \\ &= -nr^{n+1} + \sum_{k=1}^n (k - (k-1))r^k = -nr^{n+1} + \sum_{k=1}^n r^k \\ &= -nr^{n+1} + r \frac{1-r^n}{1-r}. \end{aligned}$$

したがって

$$s_n = -r \frac{nr^n}{1-r} + r \frac{1-r^n}{(1-r)^2}.$$

- $|r| < 1$ のときは, (1) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

- $|r| \geq 1$ のときは,

$$\begin{aligned} |s_n| &= \left| \frac{r}{(1-r)^2} + r^{n+1} \frac{nr - n - 1}{(1-r)^2} \right| \geq \left| r^{n+1} \frac{nr - n - 1}{(1-r)^2} \right| - \frac{|r|}{(1-r)^2} \\ &= (n+1)|r|^{n+1} \left| \frac{nr}{n+1} - 1 \right| - \frac{|r|}{(1-r)^2}. \end{aligned}$$

ここで (2) より $(n+1)|r|^{n+1} \rightarrow +\infty$ だから, $\sum a_n$ は発散する.

- $r = 1$ のときは, $s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1}{2}n(n+1) \rightarrow +\infty$ なので問題の級数は発散する.

V-6 (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

ここで右辺の和は例 5.8 から収束するので, 系 5.26 から問題の級数も収束する.

(2) $n \geq 9$ なら $\log n \geq \log 9 = 2 \log 3 \geq 2 \log e = 2$. したがって

$$\frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 9).$$

ここで右辺の和は例 5.8 から収束するので, 系 5.26 から問題の級数も収束する.

V-7 問題 V-4 の V-4(3) の部分 s_n は有理数であるが, これは $n \rightarrow \infty$ のとき, $\pi/4$ に収束する. とくに, 補題 5.18 から $\{s_n\}$ はコーシー列 (この部分の議論は数の範囲を有理数に限っても有効). しかし, 極限值は無理数なので, 有理数の範囲では収束しない.

V-8 (1) $\alpha < 1$ のとき, $\varepsilon := (1 - \alpha)/2$ とおくと, これは正の数. したがって, 極限の定義 4.2 から, 次をみたす番号 N が存在する: 「 $n \geq N$ をみたす任意の番号 n に対して $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha \right| < \varepsilon$ 」このとき, $n \geq N$ ならば

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \alpha + \varepsilon = \frac{1 + \alpha}{2}$$

この右辺を r とおくと $0 \leq r < 1$ で,

$$|a_{n+1}| \leq r|a_n| \leq r^2|a_{n-1}| \leq \dots \leq r^{n+1-N}|a_N|,$$

すなわち, 次を満たす正の定数 A が存在する:

$$|a_n| \leq Ar^n \quad (n \geq N).$$

$|r| < 1$ だったから, 例 5.27 から考えている級数は絶対収束する.

(2) $\alpha > 1$ のとき, 正の数 $\varepsilon = (\alpha - 1)/2$ に対して次をみたす番号 N が存在する: 「 $n \geq N$ をみたす任意の番号 n に対して $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha \right| < \varepsilon$ 」. とくにこのとき, $n \geq N$ ならば

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \alpha - \varepsilon = \frac{1 + \alpha}{2}.$$

この右辺を r とおくと $r > 1$. (1) と同様に $n \geq N$ のとき $|a_n| \geq Ar^n$ ($n \geq N$) をみたす正の定数 A が存在するから, $|a_n|$ は発散するので, $\sum a_n$ は発散する.

(3) $\alpha = 1$ の場合はいろいろな場合がありうる. 実際, $a_n = n^p$ とおくと $\alpha = 1$ となるが, 例 5.8 でみるように, 級数 $\sum a_n$ は収束することも発散することもある.

V-9 (1) $a_n = n^p r^n$ とおくと,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^p r^{n+1}}{n^p r^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p |r| \rightarrow |r| \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので, 問題 V-8 から結論を得る.

(2) $a_n = n^p r^n$ とおくと,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} r^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} r^n} \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)} \right| |r| \\ &= \frac{|\alpha-n|}{n+1} |r| \rightarrow |r| \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

なので, 問題 V-8 から結論を得る.

問題 VI (72 ページ)

VI-1 問題の級数を $\sum a_n x^n$ と書く.

- (1) $|a_n/a_{n+1}| = |n!/(n+1)!| = 1/(n+1) \rightarrow 0$ なので, ダランベールの定理 6.4 より収束半径は 0.
- (2) 多項式の次数を m として $p(t) = p_m t^m + p_{m-1} t^{m-1} + \dots + p_1 t + p_0$ ($p_m \neq 0$) とおく. このとき p の根は多くとも m 個だから, ある番号 N から先は $p(n) \neq 0$ である. そこで $n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \left| \frac{p(n)}{p(n+1)} \right| \\ &= \left| \frac{p_m n^m + p_{m-1} n^{m-1} + \dots + p_1 n + p_0}{p_m (n+1)^m + p_{m-1} (n+1)^{m-1} + \dots + p_1 (n+1) + p_0} \right|. \end{aligned}$$

右辺は $n \rightarrow \infty$ で 1 に収束するので, ダランベールの定理 6.4 より収束半径は 1.

(3) (2) と同様にダランベールの定理を用いればよい.

VI-2 変数 s の冪級数

$$(*) \quad 1 - \frac{s}{3!} + \frac{s^2}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} s^n$$

を考えると, ダランベールの定理 6.4 からこの収束半径は $+\infty$ であることがわかる. すなわち任意の実数 s に対して (*) は収束する. とくに $s = x^2$ とかけば任意の x に対して

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

は収束するので, これに x を掛けた

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

も任意の x に対して収束する。すなわち、この級数の収束半径は $+\infty$ である。もうひとつについても同様。

- VI-3 (1) 収束半径は、ダランベールの定理 6.4 から求まる。 $x = \pm 1$ のときは、項が 0 に収束しないので、定理 5.2 (の対偶) から級数は発散する。
- (2) 収束半径は、ダランベールの定理 6.4 から求まる。 $x = 1$ のときは、例 2.11 から $\log 2$ に収束する。一方 $x = -1$ のときは、例 5.8 の $p = -1$ の場合だから、発散する。この級数は $x = 1$ とした級数の絶対値級数だから、 $x = 1$ のときの収束は条件収束である。
- (3) 級数 $\sum (-1)^n s^n / (2n+1)$ にダランベールの定理 6.4 を適用すると収束半径がわかる。 $x = \pm 1$ では定理 5.9 から収束するが、絶対値級数 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$ は発散する。これは

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

だが、右辺が発散することからわかる。したがって $x = \pm 1$ のときの収束は条件収束。とくに和の値は問題 V-4 V-4(3)。

- (4) 例 6.8 (3) から収束半径は 1 である。とくに $x = \pm 1$ では例 5.8 の $p = -2$ の場合なので、絶対収束する。

VI-4 べき級数

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

を考える。定理 6.4 からこの級数の収束半径は 1 である。そこで、級数 (*) が定める関数を $f(x)$ ($-1 < x < 1$) とすると、項別微分定理 6.15 から

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ。 $f(0) = 0$ に注意すれば、

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x) \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ。ここで、定理 5.9 より、(*) の級数は $x = 1$ のときに収束する。したがって、アーベルの定理 6.14 から、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \log(1+x) = \log 2.$$

VI-5 べき級数

$$(**) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

を考える。定理 6.4 からこの級数の収束半径は 1 である。この級数の第 n 項 (x^n の項ではない) を $a_n = (-1)^n x^{3n+1} / (3n+1)$ とすると、

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3n+1}{3n+4} |x|^3 \rightarrow |x|^3 \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので、問題 V-8 から (**) は、 $|x| < 1$ のとき絶対収束、 $|x| > 1$ のとき発散。したがって収束半径は 1 である。とくに $x = 1$ のときに求めたい級数で、定理 5.9 より、これは収束する。そこで、級数 (**) が定める関数を $g(x)$ ($-1 < x < 1$) とすると、項別微分定理 6.15 から

$$g'(x) = 1 - x^3 + x^6 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ。 $g(0) = 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\int_0^x \frac{dt}{1+t} + \int_0^x \frac{(2-t)dt}{1-t+t^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{6} \int_0^x \frac{(1-2t)dt}{1-t+t^2} + \frac{2}{3} \int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \log(1+x) + \frac{1}{6} \log(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3} \log(1+x) + \frac{1}{6} \log(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

が $-1 < x < 1$ で成り立つ。ここで (**) の級数は $x = 1$ で収束するので、アーベルの定理 6.14 から、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}.$$