

2017年10月5日(2017年10月12日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 2

お知らせ

- 提出物は返却いたします。コメントの文字が読めないかもしれませんが、山田個人用のメモだと思って下さい。ご意見へのコメントや質問への回答の正式版はこの用紙にあります。

前回までの訂正

- 講義資料 1, 3 ページ問 1.3 : $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \theta \in \mathbb{R}$ (3 箇所)

修正点の指摘に対する補足

- 講義資料 1, 3 ページ問 1.1 : 「正規直交基」は「正規直交基底」の誤りではないか、というご指摘が複数ありましたが、どちらの語も “orthonormal basis” の意味でよく用いるので、誤りではありません。
- 講義資料 1, 4 ページ定義 1.10 : ヤコビ行列式の記号 $J_p := \det(df_p) \left(= \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right)$ の右辺に “det” の記号が必要というご指摘が複数ありましたが、 $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ は通常「ヤコビ行列式」の意味で使うと思います。多くの微積分の教科書ではそのようになっているはずですので、“det” は不要です。この記号を「ヤコビ行列」の意味で使っている具体例があれば教えてください。
- 「黒板の板書でグラフ原点の表示 O がぬけていました」というコメントをいただきました。(1) グラフ原点ではなく「座標平面の原点」ですね。「グラフ」は座標平面の部分集合だと思うので、一般に原点を含むとは限りません。(2) 今回の場合、座標軸の交点が原点である、という情報は必要でしょうか。
- 「講義資料 3 ページ、問 1.1 の 3 行目に脱字あり」とありましたが、この場合「*** という文字は の誤り」と指摘してください。
- 上に挙げた誤り “ $t \in \mathbb{R}$ ” を「講義資料 3 ページ目の問 1.3 にて誤字があります」という文でご指摘くださった方がありますが「誤字」という言葉に違和感をもちます。「誤り」ではないでしょうか。

授業に関する御意見

- 教室を少し広い部屋にしていだけませんか?
山田のコメント：現在、登録者数 31 なので、それほど狭くはないはずなのですが、もう少し動向をみて決めます。
- 教室の構造上、黒板の位置が低く、また人も多いので黒板の下段が見にくいです。特に偶数番目の板書を書き終えたらしばらくは上にあげていただけるとありがたいです。山田のコメント：了解。
- 幾何学の授業なので、図形をメインに扱うと思っていたら、微分や行列がでてきたので、色々な分野を理解できないと大変だと思った。色々な分野と関連づけて勉強していきたい。
山田のコメント：図形を「数式」で考えないと数学になりきらないでしょう。たとえば「平面曲線の合同類がなにかから決まるか」を微積分・線型代数なしで語るのはおそろしく大変では？
- 陰関数定理を見る度に当惑するので、なんとかして理解したいです。山田のコメント：してください。必須です。
- C^∞ や領域などの定義を出していただいた点が特に良かった。山田のコメント：覚えておかないといけないんですけどね。
- 微分・積分、線型代数の復習が、知識が曖昧だった範囲だったのでとてもよい復習になった。山田のコメント：そうなの？
- 一回目の授業を通じて、自分が学んできた微積分、線型代数の重要性を感じた。山田のコメント：重要というより「常識」？
- 微分は df/dx で表記し、偏微分は $\partial f/\partial x$ と表記してこの 2 つを書き分ける理由をよく知らなかったのですが、chain rule と整合するからと聞いて納得しました。山田のコメント：まあ、あとづけですが。
- 全体的にとっても面白い授業で、1 回の授業なのに「なるほど」と感動する場面が多々ありました。また、大学の授業で学生を指名

して答えさせるというのがなかなか新鮮でしたが、その方が自分も授業に参加している感じが増したり、集中できたりするので良いと思いました。 山田のコメント： 流行りもので「アクティブ・ラーニングな授業」を「やれ」と強制されているもので...

- 質問が思いつかないので、次回の授業ではもっと真剣に取り組みます。 山田のコメント： そう?
- 質問です。資料にのっている問の略解などの公開はしますか? 山田のコメント： いいえ。「ここまで考えてここから先がわからない」という具体的な質問があれば、この用紙を利用してください。
- 提出用問題は 2 問以上解いてもいいのでしょうか (スペース的な問題はあると思いますが...) 山田のコメント： 見るのが面倒臭いのでだめです。
- 1 年時の復習もしつつ、しっかりと授業についていけるように頑張ります。 山田のコメント： どうぞ
- 先生の授業はおもしろいです。これからがんばって勉強したいと思います。 山田のコメント： 2 つの主張は「独立」ですね。
- こわいです。 山田のコメント： なんで? こわくないよ♡
- 半年間よろしく願います (2 件) 山田のコメント： こちらこそ。
- 今のところ特にありません。 山田のコメント： me, too

質問と回答

質問： n 次直交行列全体 $O(n)$ が何パラメータかという話に関して、講義での列ベクトルが正規直交行列 (原文ママ：正規直交行列という語は通常使わない。「直交行列」という) であるとして、列ベクトルを決めていく考え方だと $\sum_{k=1}^{n-1} k$ パラメータとなると考えられますが、正しいでしょうか。

お答え： すなわち $\frac{1}{2}n(n-1)$ です。正しいです。

質問： (山田注：図がありますが省略。勾配ベクトルが等高線に直交することを説明した図) この図でどうやって $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ をみるかがわかりません。

お答え： 曲線 $(u(t), v(t))$ の接ベクトルが $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ です。

質問： 領域 $U \in \mathbb{R}^n$ で定ぎされた C^∞ -級でない写像 (たとえば C^1 -級) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 点 P において (原文ママ、「が」がぬけている?) $J_P = \det(df_P) \neq 0$ を満たしているとする。このとき P の近傍における逆写像が存在しないとなるような f の例を一つ教えてほしいです。

お答え： 存在しません。たぶん、逆関数定理の「 C^∞ -級」の仮定を外すと結論が成り立たない例は何か、という問題だと思のですが、この場合、成り立たないのは「逆写像が C^∞ -級である」ということです。一般に、講義ノートの定理 1.13 は「写像 f が C^r -級なら逆写像 f^{-1} も存在して C^r -級」という形で成り立ちます。

質問： 等長変換について、これは距離の定め方に依ってそれぞれ等長変換が存在するというものでよいのでしょうか。

お答え： はい。

質問： 1×1 行列とスカラーはしばしば (山田注：漢字で記入いただいています「機種依存文字」だそうです) 同一視されますが、それにより問題は発生しないのでしょうか。 お答え： 発生しそうに思う時は同一視しない。

質問： $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ の固有値、固有空間を考えることによって、 $x \in \mathbb{R}^2$ に対し、 Ax は座標平面上で考えると $y = (\tan \frac{\theta}{2})x$ に関して対称移動した点になることが説明できるという話は面白かったのですが、一方、突然固有値の話が出てきたのが不思議に思えました。行列 A の幾何学的な意味を探るために固有値を考えたことに何か同期があるなら教えて欲しいです。また、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の固有値が $e^{\pm i\theta}$ であることから、これが原点中心に回転する変換を表す行列であることが説明できたりはしないのでしょうか?

お答え： 前半：行列の固有空間とは、行列が表す線型変換がもっとも「特徴的」に働く方向のことですから、突然ではなく自然だと思います。後半：複素平面上で $x \mapsto e^{i\theta}x$ が「回転」を表すということと同じと思いますが、これは自明でしょうか。

質問： $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトル空間を求めて (山田注：結果は省略) ののですが、これによって折り返しになる理由がわかりません。

お答え： A は対称行列で固有値は ± 1 だから、おのおのに対応する固有ベクトル e_+, e_- は互いに直交する。とくにこれらを単位ベクトルにとれば $\{e_+, e_-\}$ は \mathbb{R}^2 の正規直交基を与える。そこで $x \in \mathbb{R}^2$ を $x = x_+e_+ + x_-e_-$ と表すと Ax は (以下、固有ベクトルの定義から結果は自明では?)

質問： $A \in SO(3)$ について問 1.4 の 2 つ目の項目によれば A は固有値 1 を持ちますが、この固有値に対応する固有ベクトルは A を表現とする回転操作の、原点を通る回転軸の方向ベクトルであると考えたのですが、正しいですか。

また、これを認めるなら、問 1.4 の 4 つ目の項目は、回転軸を共有する 2 つの回転操作は操作の順番をかえても操作の結果は変わらないと言えますか。

お答え： 正しいです。そういうことです。

質問： 講義資料の 5 ページ目の定理 1.13 に関して、プリントでは $f|_V$ の「逆写像 f^{-1} 」という記述がありますが、 $f|_V$ の逆写像は厳密には $(f|_V)^{-1}$ であり、 f^{-1} ではありません。そもそも $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ は全単射とは限らないので f^{-1} という写像は存在するとは限りません。この講義では $f|_V$ の逆写像を f^{-1} と表記することが許されていると判断していいのでしょうか。

お答え： たしかにおっしゃるとおりですので、文脈で正しく判断できる場合以外は“ f^{-1} ”を使わない方がよいですね。ここでは“ $f|_V$ の逆写像 f^{-1} ”といているので(ご質問のような f^{-1} の定義を上書きして局所的に)意味が通じていると思うのですが、このフレーズがないと意味不明になってしまいます。

質問： 微分幾何学と代数幾何学の中では同じ種類の曲線・曲面を扱うことがあるのでしょうか？そして、その 2 つの幾何学の共通点は何ですか？

お答え： どちらも「広大な」数学の分野なので同じ種類の対象を扱うことはあります(「同じ種類」の意味はナイーブにとっていますが、まったく同じ対象を扱うこともあります)。共通点もさまざまな点がありますが、もっとも大きな共通点は「数学であること」。

質問： 群論の授業は 3Q 開始なので、問 1.2 に出て来る群の指数の定義がわかりません。

お答え： 習っていないと知らないということでしょうか。対処の仕方は (1) 待つ (2) 自分で調べる。

質問： 資料 3P 問 1.2 の「指数 2」とはどういう意味でしょうか。詳しい説明をしてください。

お答え： 群論を学ぼう。余計なことですが「3 ページ」のことを「3P」と書くことに違和感をもちます。英語では“page 3”なので“p. 3”ではないでしょうか。日本語の語順を大事にしてかつ文字数を減らしたいなら「3 頁」という書き方があります。

質問： 閉区間の境界部分の微分は定義することはできますか？

お答え： 「右微分係数」「左微分係数」という言葉は聞いたことがありますか？

質問： 講義資料 5 ページの一番下のところでは“ $\operatorname{cosec} x$ ”の意味がわかりません。

お答え： 右辺 $1/\sin x$ のことを“ $\operatorname{cosec} x$ ”とも“ $\operatorname{csc} x$ ”とも書くということです。

質問： 講義資料の 5 ページの微分同相写像の定義は理解できるのですが、微分同相であることが何を意味するのかかわかりません。

お答え： 定義が理解できればとりあえず良いのではないのでしょうか。「意味」という語であなたが何を期待しているのかははっきりとは理解してはいませんが、定義をきちんと把握した上で、使いながら意味を体得していくものだと思います。

質問： 陰関数定理の部分が理解できなかったのもう一度解説してください。

お答え： どこまで理解できてどのへんが理解できなかったか解説してください。

質問： 陰関数定理の板書の $\{(u, v) | f(u, v) = 0\} \cap V - \{(t, \varphi(t)) | t \in I\}$ がよくわかりませんでした。

お答え： “-”ではなく“=”です。絵を描いて口頭で説明しましたが、そのどのへんが理解できませんでしたか？

質問： この 1-1 の問題を解くにあたって「9 つの成分がすべて 0 でない」という条件に合致する行列を探しました。ただ、結局この条件から上手く解の絞り込みが出来たわけではない気がします。この条件の使い方があまり良く分からないのですが、どう使えば効率的に解けたでしょうか。

お答え： 効率的である必要はあるのでしょうか。一応ヒントとしては： \mathbb{R}^3 のベクトルの少くとも一つの成分が 0 であるとはどういうことか。

質問： この授業はどのように学習すべきですか。お答え：おすきなように。

質問： 宿題の問題で講義資料に書かれた「問」は認めていいですか？

お答え： はい。

質問： 現段階では質問はないです。稀に少し読みにくい場合がありますが誤りはないと思います。

お答え： 本当に誤りはないですか？「稀に少し読みにくい」と曖昧に書かず、どの部分がどのように読みにくいを書いてください。

質問： まだ復習の範囲なので特に無し。お答え：ほんと？

質問： 私からは特にありません。お答え：me, too.

2 平面曲線の表示

復習 (陰関数定理)

定理 2.1 (逆関数定理, 教科書 199 ページ, 定理 A-1.5 の前半). 点 a を含む数直線の区間上で定義された C^∞ 級関数 $f(x)$ が $\dot{f}(a) \neq 0$ をみたすならば, $f(a)$ を含む区間で定義された C^∞ -級関数 $g(y)$ で $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ をみたすものがただ 1 つ存在する. さらに, g の導関数 \dot{g} は

$$\dot{g}(y) = \frac{1}{\dot{f}(g(y))}$$

をみたす.

定理 2.2 (陰関数定理, 教科書 200 ページ, 定理 A-1.6 の特別な場合). 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への可微分写像

$$F: U \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$$

と $(x_0, y_0) \in U$ が

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

を満たしているとき, (x_0, y_0) の近傍 V と x_0 を含む \mathbb{R} の区間 I と, その区間 I 上で定義された可微分関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $V \cap \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ が成り立つ. とくに $F(x, f(x)) = 0$ が成り立つ.

さらに $f(x)$ の導関数 $\dot{f}(x)$ は次をみたす:

$$\dot{f}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

注: テキスト 200 ページに誤植あり. 正誤表参照.

陰関数表示

- 「曲線 $F(x, y) = 0$ 」という文の意味.
- 曲線 $F(x, y) = 0$ が, 点 (x_0, y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件 (テキスト 4 ページ)
- 陰関数表示の特異点 (テキスト 4 ページ)
- 関数のグラフは陰関数表示とみなせること (テキスト 3 ページ)

パラメータ表示

- パラメータ表示 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (テキスト 4 ページ)
- パラメータ表示の正則性と特異点 (テキスト 6 ページ)
- 自己交叉: パラメータ表示では特異点でない場合がある (テキスト 6 ページ)
- パラメータ変換 (テキスト 5 ページ)
- 関数のグラフはパラメータ表示とみなせること (テキスト 4 ページ)
- 極座標表示された曲線 (テキスト 8 ページ)

弧長

- 曲線の長さの定義 (テキスト 7 ページ, 講義資料末尾の問題 2-3 参照)
- 弧長の不変性 (テキスト 9 ページの問題 2)

例

- 楕円 (テキスト例 1.1, 例 1.3 の最初の例)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

ただし $a > 0, b > 0$.

- レムニスケート (テキスト例 1.1, 例 1.3 の 3 番目の例の $a = 1$ の場合)

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

$$r^2 = \cos 2\theta.$$

問 2.3 (Cassinian oval カッシニの楕線と呼ばれる) の $a = c$ ($a = 1$) の場合 .

問 2.3. 正の定数 a, c に対して, \mathbb{R}^2 全体で定義された 2 変数関数

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - c^2$$

を考える .

- ある正の数 y_0 が存在して $F(0, y_0) = 0$ となるための, 定数 a と c の条件を求めなさい .
- このとき, ある関数 f が存在して, $(0, y_0)$ の近傍 V で $C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \cap V$ は $y = f(x)$ のグラフでかけることを示しなさい .
- さらにそのとき $f'(0)$ の値を求めなさい .

さらに, 一般の a, c に対して, 集合 $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ を, 関数のグラフで表されるような区間に分け, その関数の増減を調べることによって, この図形を図示しなさい .

- 標準的な 3/2-カスプ (テキスト付録 B-8)

$$x^3 - y^2 = 0$$

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

問題

- 2-1 次のような xy 平面上の曲線のパラメータ表示を求めなさい: 曲線上の点 P において曲線に引いた接線と y 軸との交点を $Q = (0, t)$ とするとき線分 PQ の長さが一定 a で, かつその曲線は点 $(a, 0)$ ($a > 0$) を通る. ただし, パラメータは Q の y 座標 t を用いなさい.
- 2-2 次 (陰関数定理の「逆」) は正しいか: \mathbb{R}^2 上の C^∞ -関数 $F(x, y)$ に対して, $F(a, b) = 0$ をみたす点 $P = (a, b)$ の近傍 V が存在して $F^{-1}(\{0\}) \cap V$ がある C^∞ 級関数 φ のグラフ $\{y = \varphi(x)\}$ と一致するならば $F_y(a, b) \neq 0$ である.
- 2-3 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された C^∞ -級関数 f のグラフを C とする: $C = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$. I の任意の分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^N d(P_{j-1}, P_j) \quad \left(P_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, N \right)$$

とおく. ただし, d は \mathbb{R}^2 のユークリッド距離を表す. このとき,

$$(*) \quad \sup\{\mathcal{L}_\Delta \mid \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

となることを示しなさい. (ヒント: 平均値の定理, 積分の定義, 連続関数の積分可能性.)