2017 年 10 月 12 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 3

前回までの訂正

- 講義資料 2, 3 ページ 11 行目：曲線・曲面をの曲線・曲面を ⇒ 曲線・曲面を
- 講義資料 2, 4 ページ，4 行目：$\dot{f}(x) \neq 0 \Rightarrow \dot{f}(a) \neq 0$
- 講義資料 2, 問題 2-1：点 $(a, 0) \Rightarrow (a, 0)$ $(a > 0)$
- 講義資料 2, 5 ページの 13 行目で，「問 2.3 （Cassinian oval）の...」の最初に箇条書きの点がない，というご指摘がありましたが，この文は 4 行上から始まった箇条書きの一部です．「レムニスケートは，カッシニの卵形の $a = 1$ の場合」ということ．問 2.3 の式に $a = 1$ を入れて考えてみましたか?

授業に関する御意見

- 授業 2 回目でかなりおくれをとっていることを実感したので，いそいで復習せねば． **山田のコメント：** そうですね．
- 授業と比べ，問題があまりに難しく，全く手が付けられないという有様です．
  山田のコメント： そうですか? このあたりはまだ微積分・線形代数の復習に近いと思いますが．
- 次の日に授業がないのに，次の日の 13:00 が提出だと大変です．
  山田のコメント： 翌週提出だと山田が大変です．
- 1 人 1 人の質問に対して，その回答・フィードバックがされててとてもいいなと思いました．
  山田のコメント： ちょっと大変です．
- 陰関数定理など，図が多く，視覚的にも分り易くて良かったです．
  山田のコメント： 視覚的に分かりやすいところで止まらないで，式と論理で記述できるようにしてください．
- ベクトル解析の授業では，滑らかな曲線を定義したが，よくイメージ的に理解できなかったが，本授業を通じて，意味がわかるようになった．
  山田のコメント： そうですか．「イメージ的に」というのはたいてい良くない理解のしかただと思います．
- 関数列の収束と極限関数について，すぐ嘘の議論にダマされることに気づいた． **山田のコメント：** 詐欺に騙されないように．
- 曲線の長さについて深く考えたことはありませんでしたが，今回の授業で想像以上に難解であることがわかりました．
  山田のコメント： 易しくはないですね．難解というほどのことはないと思います．
- 長さも “とする” でも “である” でもどっちでもいいという自由度がすきです．
  山田のコメント： しかし，同じ文脈の中では一つの立場で一貫しないといけません．
- 図や説明をノートにとりつつ，先生の話を聞きもらさないようにするのが大変でした． **山田のコメント：** そうね．基礎スキルですけど．
- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ や $F(x, y) = x^2 - y^2$ を用いてなめらかな曲線や特異点の説明をするときに，数式だけでなく日本語での説明も板書してほしかったです．
  山田のコメント： どの程度? むしろ適切に聞き取って．
- 授業冒頭の $\sqrt{2} = 1$ の “証明” の話は，中 1 の頃に聞いたことがありましたが，なぜ間違っているのかの説明がしにくいなぁと当時は思っていました．その話はすっかり忘れていたのですが，今日になってその説明を聞くことになるとは思っていませんが，理由がわかってすっきりしました．
  山田のコメント： それはよかった．
- $\sqrt{2} = 1$ の嘘証明の考え方がおもしろかったです． **山田のコメント：** ですか?
- $\sqrt{2} = 1$ ということが分かってよかったです．友達にも教えたいと思います． **山田のコメント：** ぜひ (?)
- おもしろかったです．定理に対しての色々な例がわかりやすかったので，定理が覚えやすいです．
  山田のコメント： 例は大事．
- これからは早めに来て席を取ろうと思います． **山田のコメント：** それがよいと思います．

質問と回答

質問： 陰関数定理や逆関数定理に関して，これらの証明をしっておきたいのですが，適切な文献などがあれば教えて下さい.

お答え： M. Spivak, "Calculus on Manifolds", 1965. 邦訳：スピヴァック（斎藤訳），多変数の解析学—古典理論への現代的アプローチ，東京図書.

質問： ある 1 つの曲線に対して $\gamma(s)$, $\tilde\gamma(t)$ の 2 つのパラメータ表示が与えられているときに，パラメータ変換の式を機械的に得る方法はありあすか? 弧長という不変量があるので，それが関係するような気がするのですが.

お答え： 今回やる，とも思いましたが，次のような方法です．$\gamma(s) = (x(s), y(s))$，$\tilde\gamma(t) = (\tilde x(t), \tilde y(t))$ とおくとき，方程式

$$x(s) = \tilde x(t), \qquad y(s) = \tilde y(t)$$

を s または t について解く．方程式が過剰ですが，同じ曲線を定めていることから解けるはず.

質問： 曲線は一般にどのように定義すればよいのでしょうか?

お答え： 考えたい問題によって違います．ここでは「曲線」とはこういうものと考える，という宣言があればどう考えてもよいのです．この講義では「正則にパラメータづけられた曲線」すなわち「正則曲線」を扱います.

質問： 板書で何回かでてきた e.g. は「例」の意味だと思うのですが，何の省略形ですか．ex よりも e.g. と書く方が一般的ですか.

お答え： 辞書をひこう．前半：exempli gratia．後半：読み方は "for example"（なんで英語はこういう謎の読み方が多いんだろう．非文明的ですよね）．したがって "for example" で置き換えられる場所で用いる．ex は名詞 "example" で置き換えられる場所で用いる.

質問： 助変数表示のところで $\dot\gamma(t_0) \neq \mathbf{0} \Rightarrow x = x(t) \to t = t(x)$ という風に導いていますが，どのように逆関数定理を用いたのですか（どうつかったら $x = x(t)$ が導かれるのですか）また，そこから $t = t(x)$ と分かるのもなぜですか.（逆関数と証明していないのにもかかわらずなぜそうなるのですか）また $t = t(x)$ が C^∞-級と分かるのもなぜですか.

お答え： あまり周辺事情を理解されていないようですね．次を確認しましょう：(1) 黒板に書いた $\dot\gamma(t_0) \neq \mathbf{0}$ から直接次の議論にいくのではなく「$\dot x(t_0) \neq 0$ の場合」を考えています．(2)「逆関数定理」とは何でしょう．ステートメントを書いてみましょう．証明はこの講義ではやりません．解析学ですでに学んでいるのだと思います.

質問： $F(x,y) = x^2 + y - 1$，$G(x,y) = (x^2 + y - 1)^2$，$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow G(x,y) = 0$ より同じ曲線を扱っているのですが，$F(x,y)$ には特異点がなく，$G(x,y)$ は曲線のすべての点が特異点という認識でいいのですか．特異点は曲線の点でなくては行けないのでしょうか.（曲線の点かつ $(F_x, F_y) = \mathbf{0}$）それともただの $(F_x, F_y) \neq \mathbf{0}$ をみたす点があればよいのですか?

お答え： 日本語が不完全なので完全にご質問の意味を把握しているわけではありませんが，前半：はい．ただし「認識」（ちょっと曖昧な語に感じます）ではなく「陰関数表示の特異点の定義」からこのことが明確に正しい．後半：前者.

質問： 逆関数定理で $x(t_0) \neq 0$ である理由が理解されていません．$t(x)$ を考えたときに x の逆数が考えられないからでしょうか.

お答え： "$x(t_0) \neq 0$" であるという条件は不要．なぜ必要と思ったのでしょう．"逆数" とかかれていますが，通常の「逆数」の意味で使っていますか? "逆関数" の意味ではないのですか.

質問： ある陰関数表示によるグラフ（原文ママ：どういう意味だろうか．陰関数表示された図形（i.e. $\mathbb{R}^2$ の部分集合）のこと?）に関して複数の助変数表示の方法があると思うのですが，そのやり方によって特異点に成る場合とならない場合をもつ特異点は存在するのでしょうか.

お答え： 陰関数表示：$F(x,y) = y^2 = 0$，パラメータ表示 $(t, 0)$ $(t \in \mathbb{R})$；$(u^3, 0)$ $(u \in \mathbb{R})$.

質問： $\gamma(t)$ はなめらかな曲線 $\Rightarrow \forall t, \dot\gamma(t) \neq 0$ が成り立ちますか.

お答え： パラメータのとり方による．$\gamma(t) = (t^3, 0)$ は x 軸のパラメータ表示だから図形としては，なめらかな曲線．しかし $\dot\gamma(0) = \mathbf{0}$.

質問： 自己交叉の交叉は交差と異なるのは何か意味がありますか．$y = f(x)$ が関数でなくグラフなのが分かりません.

お答え： ないです．$x^2 + y^2 = 1$ を「円」とよぶのと同じ略記法.

質問： なめらかなのとそうでないのとではどれくらいギロンに障害がでるのですか.

お答え： あなたはどの意味で「なめらか」の語を用いていますか．「正則にパラメータづけられた曲線」の意味なら，もしそうでないと曲率が定義できない（決定的な障害でしょ）．

質問： これからの授業で助変数表示を主に用いると思うのですが，陰関数表示された曲線は全て助変数で表わすことができるのでしょうか?

お答え： （陰関数表示の特異点をもたなければ）はい．(1) 特異点でない点の近くでは，グラフ表示できるが，グラフ表示は助変数表示の特別な場合とみなせる．したがって局所的には助変数表示できる．(2) 一般に，特異点をもたない陰関数で表される図形は連結とは限らないが，個々の連結成分は $\mathbb{R}$ か S^1 (円周) に微分同相（1 次元多様体として．この授業では深入りしない）．したがって $\mathbb{R}$ や S^1 を定義域として助変数表示できる．すなわち，大域的に助変数表示できる．

質問： 2 つの曲線が合同であるとはどのように定義しますか?

お答え： $\mathbb{R}^2$ の等長変換（合同変換）で移り合う．今回やります．

質問： 授業で 3/2-カスプという言葉が出て来て，テキスト付録 B-8 には 3/2-カスプについて判定条件なども記事されていますが，3/2-カスプはなにか数学的に深い意味のある曲線なのでしょうか．また，なんで「3/2」に着目しているのでしょうか.

お答え： 付録 B-8 の言葉で「3/2-カスプ」を定義すると，平面曲線にもっとも頻繁に（ジェネリックに）現れる特異点が「3/2-カスプ」であることが知られています．すなわち，特異点のなかでも最もたちが良さそうなもの．この授業では深入りしません.

質問： 曲線をパラメータ表示する場合，パラメータの動く値の範囲を適切に制限しなければ $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ $(0 \leqq t \leqq 4\pi)$ のようにすでに通った道を再び通ることになってしまいますが，これも曲線と認めるのですか．その場合，先の曲線の孤長（原文ママ：弧長のことか）は 4π となるのですか.

お答え： 認めます．そうです.

質問： 単位円のパラメータ表示は $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $(-\pi < t < \pi)$ ですが，ここで $(-\pi < t \leqq \pi)$ を書かないと何か問題が発生するのでしょうか.

お答え： 上のような例が生じます．$[0, 2\pi]$ で定義された $(\cos t, \sin t)$ と $[0, 4\pi]$ で定義された $(\cos t, \sin t)$ はともに「正則曲線」ですが，その図形的な性質（たとえば弧長）が違いますね.

質問： $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ のところで，講義資料は $(-\pi < s \leqq \pi)$，板書では $(-\pi < s < \pi)$ ですが，どちらでもよいのですか.

お答え： 考える問題による．講義では，曲線 $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ と同じ範囲をパラメータ表示したかったのでご質問の範囲にした.

質問： パラメータ表示の陰関数定理も（原文ママ：意味がよくわからない）$\dot\gamma(t) \neq 0$ for all t は十分条件だが必要条件ではないということでしょうか.

お答え： ご質問の文の意味がよくとれませんが，たぶん想像するに，そういうことです.

質問： 今日の授業の最初で扱った「$\sqrt{2} = 1$ の証明」が誤りであることの理由は「関数とその関数の微分が一様収束していないから (*)」ということなのでしょうか．授業中は「関数は一様するがその微分は収束しない例」を挙げていましたが，上の証明は難しいのでしょうか.

お答え： 理由は (*) ではありません．実際，講義で挙げた例（折れ線をグラフにもつ関数）は，定数関数 0 に一様収束します．しかし，微分の方は，定数関数の微分（すなわち恒等的に 0 であるような関数）に（一様収束どころか）収束しません.

質問： 三角形の内接円と外接円のかくコツについて教えて下さい.

お答え： 「コツを教える」のでしょうか「コツについて教える」のでしょうか．質問文の通りなら「コツとは多くの試行錯誤によって身に付けるもの」

質問： 問題 2-1 は初等函数で媒介変数表示できるのですか? 自分で解こうとした所，三角函数を含む非線形微分方程式が現れて行き詰まってしまいました.

お答え： その微分方程式を書いてくれると嬉しいですね．ちなみに答えは $(a\,\mathrm{sech}(t/a), t - a\tanh(t/a))$.

質問： 2-3 を考えたのですが，

$$\sup\{\mathrm{L}_\Delta \mid \Delta \text{ は } I \text{ の分割 }\} \leqq \int_a^b \sqrt{1 + (f(x))^2}\, dx$$

で止まり（原文ママ），$\leqq$ が示せません．ヒントをください.

お答え： 右辺の式が違っていませんか? 右辺の積分が確定することと Darboux の定理を用いる.

質問： 毎回の問題の解答例をテスト勉強する上でほしいです.

お答え： 講義資料 2，2 ページ 4 行目参照.「テスト勉強をする」などというくだらない目的のために時間を使うのは嫌です．わからないことがありましたらこの用紙を利用してください.

質問： 私からは特に有りません. **お答え：**me, too.

3 弧長パラメータと曲率 (テキスト §2)

■弧長パラメータ表示

- 速さが 1 になるパラメータを弧長パラメータという（12 ページ）

■曲率・曲率円

- 曲率の定義（13 ページ (2.5) 式），計算法（13 ページ (2.6) 式；弧長パラメータ，14 ページ (2.7) 式；一般のパラメータ）．
- 曲率のパラメータ変換による不変性：定義から直接わかる．
- 曲率の回転・平行移動による不変性：(21 ページ 系 2.7)．
- 曲率円（15 ページ），これが「曲線をもっともよく近似する円」であること（17 ページ，定理 2.4）

問 3.1. 懸垂線 $y = \cosh x$ に対して

- その弧長パラメータ表示を求めなさい．
- 曲率の定義から，弧長パラメータ s の関数として曲率を求めなさい．
- 上の結果とパラメータ変換の式を用いて曲率を x の関数で表しなさい．
- 一般の助変数表示に対する曲率の公式（テキスト 13 ページの式 (2.7)）を用いて懸垂線の曲率を求め，上の結果と一致することを確かめなさい．

■曲率が平面曲線を定めること

■フルネ

- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$
- フルネ枠 $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$
- フルネの公式（テキスト 21 ページ）

2017 年 10 月 12 日

問題

3-1 パラメータ表示

$$\gamma(t) = (\cos t(2-\cos 2t), \sin t(2+\cos 2t))$$

で与えられる曲線 γ について

(1) $\mathbb{R}$ の開区間 I で次を満たすものを求めなさい：

- γ は I 上で正則である．
- I は 0 含む．
- I は上の条件を満たすものの中で最大である．

(2) 区間 I 上の曲線 $\gamma(t)$ を弧長パラメータ s を用いて具体的に表示しなさい．ただし $s=0$ は $t=0$ に対応しているとする．

(3) 曲線 γ の曲率 κ を上で求めた弧長パラメータ s の関数として表しなさい．

(4) 曲線 γ の曲率をパラメータ t の関数として表しなさい．

3-2 曲率関数が弧長 s と一致する曲線の形を描きなさい．さらに $s \to \pm\infty$ のとき，曲線はどうなるか説明しなさい．

3-3 パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(t)$ と書くとき，任意の実数 u に対して $\sigma_u(t) = \gamma(t) + u\boldsymbol{n}(t)$ であたえられる曲線 σ_u を $\gamma(t)$ の**平行曲線**とよぶ．$t=t_0$ における γ の曲率が 0 でないとき，t_0 が $\sigma_u(t)$ の特異点になるような u の値を求めなさい．