

2017 年 10 月 19 日 (2017 年 10 月 26 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 4

### 前回までの訂正

- 講義資料 3, 1 ページ下から 7 行目: 何回 ⇒ 難解
- 講義資料 3, 3 ページ, 下から 16 行目から 13 行目 (削除): 重複がありました.
- 講義資料 3, 3 ページ下から 9 行目: いあしたが ⇒ いましたが
- 講義資料 3, 3 ページ 22 行目:  $(-\pi < t < \pi) \Rightarrow (-\pi < t \leq \pi)$ .
- 講義資料 3, 5 ページ, 下から 3 行目: 単位法ベクトル ⇒ 単位法線ベクトル
- 講義資料 3, 6 ページ, 下から 3 行目: 単位法線ベクトル場 ⇒ 単位法線ベクトル (教科書の用語に合わせた)

### 授業に関する御意見

- 問題の配点が 2 点で, 質問の配点が 3 点で, 後者の方が配点が高いのはなぜですか? (がんばって解いた問題で 2 点もらえたのに, 質問の方の点数が 3 点中 1 点とかになると, なんだか悲しい気持ちになります.)  
山田のコメント: すなわち, 「よい質問をする」ことは「問題を解くこと」より難しい. これが配点の根拠の一つ. もう 1 点, 皆さんは「問題」は点数をつけなくても解くのでは?
- 3-1 では計算量が多かったこともあり, あと 3 行分くらい裏面に解答スペースが欲しいと思いました. 山田のコメント: 下書きはしました?
- 偶数番の黒板を一番下まで書かれると, その黒板を上へあげた時に見えないです. (今回は見えなくても内容わかったので大丈夫でしたが)  
山田のコメント: 了解. 気をつけます.
- 後ろの席では少し見づらいです. 山田のコメント: 了解. 前の方の席, まだ少し空いていると思います.
- 曲率の定義が少し複雑でややこしいです. 山田のコメント: 「白い白馬」みたいです.
- 色々複雑になってきたけど, 復習しつつあっからんとやってゆきます. 山田のコメント: どうぞ
- 問題が難しくて毎回手がつかないです. 山田のコメント: おかしいな.
- 3-1 の計算は挫折しました. 計算力を鍛えます. 山田のコメント: そんなに大変ではないと思いますが.
- 曲率から曲線が定められることが理解できました. 山田のコメント: 了解.
- 弧長をパラメータとするところがとても印象的でした. 山田のコメント: そうですか.
- 分かり易いです. 山田のコメント: ほんと? それは困った.
- 教室の後ろの黒板に, 問題の解答の方針を書いてもらったのがありがたかったです. 山田のコメント: どうも.
- 先生の無駄話は結構好きなので, これからも続けてください. 山田のコメント: プレッシャーですね.
- 先生の教え方が大好きです ♡ 山田のコメント: え?
- わが国の治者の 1 人であるという自覚をもち選挙に臨みたいと思います. 山田のコメント: ぜひ.
- 我思う, ゆえに我あり 山田のコメント: Cogito ergo sum

### 質問と回答

質問: 曲率  $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$  は突然出てきましたが, これは曲率  $\kappa(t)$  をこのように定義するという事によろしいのでしょうか.

お答え: 講義では, この段階で「曲率を定義」はしていません (あとで定義する, と述べたはず). 弧長パラメータで表示しなおして, 曲率を定義したはず. このとき, ご質問の式が, 一般のパラメータの曲率を与えている, ということを示しています.

質問: 教科書では  $\gamma''(s)$  が  $n(s)$  に比例していることからその比例定数を  $\kappa(s)$  と表し, 曲率と定義して,  $\kappa(s) = \det(\gamma', \gamma'')$  と表せ, さらにそこから  $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}$  と表しているのに対し, 授業では, 逆に  $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}$  で曲率を定義したのはなぜですか.

お答え: 実はそうしていないのに気が付きませんか? まず  $\kappa(t)$  という関数を定義すると, これが「不変性を持つ」. 「実

はこれが曲率だが、定義は後でやって、これと一致することを示す」という説明をしたはず。「パラメータの取り方によらない」「向きを保つ合同変換によらない」という言葉の意味を説明するために最初の表式を用いた。

質問：今回定義した曲率は向きを保つ合同変換で不変でした。では、一般に向きを保つとは限らない合同変換で不変なもの考えることはあるのでしょうか。あるのであればその例としてどんなものが考えられるのでしょうか。

お答え： 弧長・角度。

質問： 授業で Claim 1  $\mathbb{R}^2$  の向きを保つ合同変換で不変 (1), Claim 2 パラメータの取り方によらない (2) という主張を曲率  $\kappa(t)$  はみだしているということを示しましたが、逆に (1), (2) をみだす曲線  $\gamma(t)$  から生成される関数  $f(t)$  は曲率以外にも存在するのでしょうか？ もし、存在したとして何か固有 (原文ママ：固有?) の意味を持っていたりするのでしょうか。

お答え： 任意の一変数関数  $F(u)$  に対して  $F \circ \kappa$  は上の性質を満たします。

質問：  $\kappa = \det(\gamma', \gamma'')$  が成り立つのは正則にパラメータづけられた平面曲線の時だけですか？

お答え： 「弧長パラメータで表示された平面曲線の時」だけです。

質問： 抛物線 (山田注：放物線。ご質問の式の方が本当の字) のある点を通して放物線に接する円は  $\kappa$  に関連性がありますか。

お答え： 「ある点で放物線に接する」円のことだと思いますが、そういう円はたくさんあります。その中で「曲率に関係している」円について今回こそ説明します。

質問： テキストをみると (p. 6) 正則曲線は閉区間で定義された— となっていますが、問題 3-1 では开区間を考えているので、色々大丈夫なの不安です。

お答え： だめだとしたら何でしょう。たとえば全体の弧長はまずいですね。曲率は「局所的」な概念なので、定義域が閉でも開でも問題はないようです。

質問：  $s$  を弧長パラメータとする曲線  $\gamma(s)$  の接単位ベクトル (原文ママ：単位接ベクトルのこと?)  $e(s)$  に対して  $e(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$  を満たす関数  $\theta(s)$  が存在することはわかるのですが、この  $\theta(s)$  が微分可能となるようにとれることの証明方法がよくわかりません。どのような方針で示せばよいのでしょうか。また  $\theta(s)$  は  $C^\infty$ -級ですか。

お答え：  $C^\infty$ -級になります。微分可能性は局所的な概念だから、各  $s_0$  の近傍で  $C^\infty$ -級を示せば良い。ここで  $e(s) = (\xi(s), \eta(s))$  と書けば  $\xi, \eta$  は  $s$  の  $C^\infty$ -関数。もし  $\xi(s_0) \neq 0$  ならば  $s_0$  の近傍で  $\tan \theta(s) = \eta(s)/\xi(s)$  は  $C^\infty$  関数で、 $\theta(s) = \tan^{-1}(\eta(s)/\xi(s)) + \text{定数}$  も  $C^\infty$ -級になる。実際  $\tan^{-1} t$  は  $C^\infty$ -級だから、 $\xi(s_0) = 0$  となる点  $s_0$  の近くでは  $\eta(s_0) \neq 0$  だから  $\tan$  の代わりに  $\cot$  を用いればよい。

質問： 正則にパラメータ付けられた曲線は弧長パラメータで表示し直すことができると授業で習ったが  $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(u)| du$  の式から見れば、この積分は一般に初等関数で求めることができないと思うが、結局弧長パラメータ表示は効果的ではないのではないかと？

お答え： 「求める」という立場でいうとなんとも言えませんが、積分は「存在している」のだから、弧長パラメータ表示も「存在している」。だから具体的な式はどうであれ、それは「ある」のだとして扱ってよい、というのが数学の考え方です。

質問：  $\gamma(t) = (t^3, t^3)$  この曲線の特異点での曲率は無限大と言えますか？

お答え： 特異点での曲率は「未定義」なので、いくつとも言えませんが、 $t \neq 0$  での曲率は恒等的に 0 なので、特異点に近付くとき、曲率は 0 に近づきます。一方 3/2-カスプ  $(t^2, t^3)$  の場合、 $t = \pm 0$  に近付くとき曲率は無限大に発散します。確かめてみよう。

質問： 問題 3-2 において  $s \rightarrow \pm\infty$  で曲線が 1 点で収束することは複素積分を用いれば示せるそうですが、それを用いずに  $\int_0^\infty \sin t^2 dt$  が収束することはどのように示せばよいのでしょうか。

お答え： フレネル積分の値

$$\int_0^\infty \sin t^2 dt = \int_0^\infty \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

はガウス積分に帰着させて求めるのが普通で、その仮定で複素積分を用います。実の範囲で収束判定をする方法については「アイデア募集」。広義積分は絶対収束しないので工夫が必要ですが、 $[\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2(n+1)\pi}]$  での  $\sin t^2$  の積分 (正になるはず) の値が上から適切な数で評価されればなんとかなりますね。

質問： 懸垂線は一樣な密度のひもを一樣重力場の中に固定し、両端を固定したときのひもの形であるという話が授業中にあったと思います。これは懸垂線がひもの位置エネルギーを最小にする形であることを示していると思いますが、このように汎関数が最小値をとるときの関数を求める方法はありますか。

お答え： それを変分法。「位置エネルギーの総和」という汎関数のオイラー・ラグランジュの方程式を解く（というキーワードで検索してみよう）。

質問： テキスト §2, 3, 車の問題に関してです。解説には前輪と後輪の軌跡が同心円を描くことを前提にしていたと思うのですが、これは自明でしょうか。例えば前輪駆動か後輪駆動かによって違いが生じないのか確かめようとしたのですが、どうすればよいかわからなかったのです。

お答え： もちろん「曖昧」な問題なので、解答には適切な設定（ここでは同心円）が必要。問題を複雑にしようと思えばいくらでも複雑にできますね。ちなみに車が「曲がる」メカニズムはかなり複雑で、たとえば「車はなぜ曲がるか」（三田村樂三，山海堂 2001）という書物もあります。

質問： 相加平均・相乗平均の関係の一般化について、 $n = 2^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) で示した後  $2^k < n < 2^{k+1}$  を示すという方法があったと思うが、他の方法はありますか。

お答え： 正の定数  $x_1, \dots, x_{n-1}$  に対して、関数  $f(t) = (x_1 + \dots + x_{n-1} + t)/n - \sqrt[n]{x_1 \dots x_{n-1} t}$  ( $t > 0$ ) の最小値を求めよ。

質問： 講義資料 3 の 5 ページに、「速さが 1 になるパラメータを弧長パラメータという」と書いてありますが、授業では「弧長パラメータは曲線の速さを 1 にする」としてのみ扱っていたので、逆の示し方を教えて欲しいです。

お答え： 教科書 5 ページの 11 行目でも同じことを言っていますね。弧長パラメータ  $s$  で表された曲線にパラメータ変換  $s = s(t)$  をほどこした曲線の速さが 1 ならば  $s(t) = t + \text{定数}$ 。これは簡単に示せませんか？

質問： 3-1 の (3) がうまく計算できなかったのですが、 $\gamma(t)$  を弧長パラメータ  $s$  で表すとき、三角関数やその逆関数で表すのと、 $s$  と定数の和やその累乗で表す形式ではどちらが後の展開につながりやすいのでしょうか。特に今回の 3-1 の場合について知りたいです。

お答え： どちらも使う。少くとも  $\cos^{-1}(\sin s)$  は超越関数を用いなくて表せる、などということは常識として知っておくべき。

質問： 問題 3-1 (3) で、 $\gamma'(s), \gamma''(s)$  を用いて  $\kappa(s)$  を求める所でつまってしまいました。計算がかなり複雑になってしまいましたか？

お答え： そんなことはないと思います。

質問： 左向き単位法線ベクトルという表現は座標軸の取り方によっては合わなくなるのでしょうか？

お答え： 「合わなくなる」とはどういうことを想定していますか？ 座標軸は「右手系」すなわち、第二の座標軸は第一の座標軸を反時計回りに 90 度回転したものとなるように取ります。

質問： この手の問題はどこまで記述するのが良いか迷いますね。

お答え： ですね。

質問：  $K$  (ケー) と  $\kappa$  (カッパ) はどのように見分けるのですか。書き分ける際にはどこに注意すると良いですか。

お答え：  $K$  は大文字のケイですね。高さが違います。

質問： 双曲線関数に関する公式の作り方を教えてください。

お答え： 指数法則。

質問： 試験にて双曲線関数を含む問題を、これらの定義なしに出題する可能性はありますか。

お答え： はい。

## 4 平面曲線の曲率

### 曲率関数の性質

- パラメータのとり方によらない (標準的なパラメータに変換して定義しているから) .
- パラメータを  $s$  から  $-s$  に変更する (曲線の向きを反転させる) と曲率は符号を変える .
- 曲線に回転と平行移動を施しても曲率は不変 (教科書 21 ページ, 系 2.7; 証明は後半)
- 曲線のある直線に関して折り返すと曲率は符号を変える (教科書 27 ページ, 問題 4) .
- 半径  $a > 0$  の左回り (右回り) の円の曲率は  $1/a$  ( $-1/a$ ), 直線の曲率は 0 (教科書 13 ページ, 例 2.1) .
- 曲率円は曲線と 2 次の接触 (教科書 16 ページ, 定義 2.3) をする, すなわち曲線を最もよく近似する円 (教科書 17 ページ, 定理 2.7) .
- ガウス写像と曲率 .

### フルネの公式

- フルネ枠 (教科書 22 ページの (2.15) 式に現れる  $\mathcal{F}$ )
- フルネの公式 (教科書 21 ページ, 式 (2.14), 22 ページ (2.15))
- 平面曲線の基本定理

### 閉曲線 (概略のみを扱う)

- 回転数 (教科書 29 ページ)
- 単純閉曲線と回転数 (教科書 31 ページ, 定理 3.2)
- 閉曲線の正則ホモトピー類と回転数 (教科書 33 ページ, 定理 3.3)

## 問題

- 4-1  $s$  を弧長パラメータとし, 曲率関数が  $\kappa(s) = 1/(1+s^2)$  となるような曲線のパラメータ表示  $\gamma(s)$  を求めなさい .
- 4-2 弧長によりパラメータづけられた曲線  $\gamma(s)$  の  $s = s_0$  における曲率が 0 でないとする . このとき, 3 点  $\gamma(s_0) = P$ ,  $\gamma(s_0 + t) = Q_t$ ,  $\gamma(s_0 - t) = R_t$  を通る円  $C_t$  は  $t \rightarrow 0$  とすると  $s_0$  における  $\gamma$  の曲率円になることを示しなさい .
- 4-3 弧長  $s$  をパラメータとする平面曲線  $\gamma(s)$  ( $-\infty < s < +\infty$ ) の曲率  $\kappa(s)$  が周期  $L$  をもつ周期関数であるとき次の問いに答えなさい .
- (1) 曲線論の基本定理を用いて, 行列  $A \in \text{SO}(2)$  と  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  で次を満たすようなものが存在することを示しなさい: 「 $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \mathbf{b}$  が任意の  $s \in \mathbb{R}$  に対して成り立つ .」ただし,  $\gamma(s)$ ,  $\mathbf{b}$  は 2 次の列ベクトルとみなしている .
  - (2) さらに  $\gamma(0) = (0, 0)$ ,  $\gamma'(0) = (1, 0)$  とするとき, (1) の  $A$ ,  $\mathbf{b}$  を  $\kappa$  を用いて表しなさい .