2017 年 10 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 5

お知らせ

- 次回，11 月 2 日（木）の講義の際に定期試験の予告を行います．

前回の補足

- 提出物で「題意」という語をみました．山田はこの単語の意味を知りません．「仮定」と置き換えられるであろう文脈，「結論」と置き換えられるであろう文脈のいずれでも「題意」を見たことがあります．こんな曖昧な語は使わないで「仮定」または「結論」とはっきり言って下さい．どうしても「題意」を使いたいのであれば「この意味で使う」という宣言をお願いします．

前回までの訂正

- 前回の問題 3-2 へのコメントで，$s \to +\infty$ のときの極限は $(\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$．実際
$$\int_0^\infty \sin\frac{t^2}{2}\,dt = \int_0^\infty \cos\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
- 講義資料 4, 1 ページ，「前回までの訂正」で行番号が違っているというご指摘がありました．修正前のファイルが手許にないので確認できませんが，web に上がっている資料で訂正済みですのでご確認ください．
- 講義資料 4, 2 ページ，下から 9 行目：どのようにう示せば ⇒ どのように示せば
- 講義資料 4, 3 ページ，下から 9 行目：半時計回り ⇒ 反時計回り
- 講義資料 4, 4 ページ，9 行目：定理 2.7 ⇒ 定理 2.4

授業に関する御意見

- レポートの締切をもう少し伸ばしていただけると助かります．（せめて講義翌日の 17:00 くらいまでにしてほしいです．）
  山田のコメント： 申しわけありませんが 17 時だとその週のうちにうけとれないことがあります．
- 問題の解答を授業の冒頭に教えてくれると復習ができてうれしいです．今後も続けてほしいです．
  山田のコメント： 時間によりますが，努力します．
- 問題 4.3 (2) は解けませんでした．　**山田のコメント：** 残念です．
- 前回の問題 3-1 で，$\gamma(t) = ((2-\cos 2t)\cos t, (2+\cos 2t)\sin t)$ と書いた方が誤解が少ないので，そう書いて欲しいです．
  山田のコメント： 問題文のような形だと何をどう誤解するのですか?
- 講義資料に前回のレポート問題の解説があると嬉しいです．　**山田のコメント：** 講義で説明しているので聞いてください．
- 初めて交対行列（原文ママ：交代行列のことか）の良さを感じました．　**山田のコメント：** そう?
- 高校時代の置換積分を思い出せてよかったです．　**山田のコメント：** わすれないでください．
- 平面曲線の基本定理は曲率のイミを考えると成り立ちそう，という気になりますが証明は若干面倒に感じました．
  山田のコメント： たいていの定理ってそうじゃない?
- 平面の範囲では，上手い定義により様々な表現を驚く程簡潔に行える事を思い知りました．
  山田のコメント： 何の話題について話しているのかわかりません．
- 図で説明するのはわかりやすかったです．　**山田のコメント：** どの?
- 教科書を生協で購入しようとしたところ売り切れていました．頑張って手にいれます．
  山田のコメント： 申しわけありません．予定より受講者が多かったようです．

- この前，位相空間論の授業で「稠密」の「稠」の字の右側は「周」という字ではなく，「周」の字の「土」の部分の縦線がとびでたものだと知りびっくりしました．字の書き方についてよく話している山田先生なら知ってそうだなと思いました．やっぱり知ってましたか... **山田のコメント：** 知りませんでした．深いですね．
- 結局講義室変更をしますか． **山田のコメント：** 現在の出席数なら大丈夫だと思います．試験は考えます．
- 復習してやっと進度においつきました． **山田のコメント：** おめでとう．
- 期日前投票に行ってきました． **山田のコメント：** ご苦労様．山田は土曜日にいって 1 時間まち．
- 手を痛めていても授業をしてくださり，ありがとうございます． **山田のコメント：** やらないわけにはいきません．
- 特になし． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 合同な曲線は，回転と平行移動という 2 つの操作のみで移る曲線のことですか．それとも $\hat{\gamma}(t) = A\gamma(t) + \boldsymbol{b}$（$A$: 直交，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$）を満たす $\hat{\gamma}(t)$, $\gamma(t)$ のことですか．

お答え： 一般的な用語であれば $A \in \mathrm{O}(2)$ とすべきです．今回の授業の文脈（平面曲線の基本定理の「一意性」）では $A \in \mathrm{SO}(2)$ とすべきです．実際，折り返しによって曲率は符号を変えます．したがって「向きを保つ合同変換をのぞいて一意」というべきでした．

質問：「2 つの曲線が 2 次の接触をしている」の定義の前提として「1 次の接触をしている」がありました．つまり 1 次の接触をしていない 2 つの曲線に関しては 2 次の接触に関する議論はできない（定義されていない）という理解で正しいですか． **お答え：**正しいです．

質問： 接触について，授業ではパラメータ表示された曲線同士の接触の定義でしたが，陰関数表示された曲線とパラメータ表示された曲線の間も同様にしてもよろしいですか． **お答え：**「同様にする」とは具体的には?

質問： 曲率円が 2 次の接触をすることの別計算：$\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ で $\vec{e} = \vec{e}(s_0)$, $\vec{n} = n(s_0)$, $\kappa = \kappa(s_0)$ として $-\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ とおきます．$\vec{p}(t) = \gamma(s_0) = \frac{1}{\kappa}\vec{n} + \frac{1}{\kappa}(\cos(\kappa t + \alpha), \sin(\kappa t + \alpha))$ は曲率円の方程式で $\vec{p}(0) = \gamma(s_0)$, $\frac{d\vec{p}}{dt}(0) = \vec{e}$, $\frac{d^2\vec{p}}{dt^2}(0) = \kappa\vec{n}$.

お答え： 2 次の接触をするための「どの条件」を使ったのでしょう．この講義や教科書での定義は「グラフ表示したときに 2 階微分まで一致」ですが，ここではそれは示していませんね．ところで，“$\vec{e}$” などの記号は，講義やテキストの記号と違っていますね．お好きな記号を使うのは構いませんが，この記号を使っていない文脈ですので「講義やテキストで使う記号と異なるものを使う」ことを明記すべきだと思いますが．

質問： $\mathbb{R}^2$ 内では曲率円を用いて曲線の近似を行ったが，$\mathbb{R}^3$ における曲面の近似は同様に球などを用いて行われるのでしょうか．

お答え：「など」が何をさすか分かりませんが（わざと曖昧にしている？）球面では足りません．4Q で説明します．

質問： 2 つの曲線が点 p で 3 次の接触のとき，（図省略；教科書の図 2.4（左）のように，一方の曲線が他方の曲線を接するようにまたいでいる）の場合は可能でしょうか．

お答え： グラフ $y = f(x) = x^2 + x^3 + x^5$, $y = g(x) = x^2 + x^3$ は原点で 3 次の接触をしますが，$g(x) - f(x) = -x^5$ は原点を挟んで符号を変えます．

質問： 3 次以上の接触の場合のメリットはどのようなものがありますか．

お答え： 頂点で曲率円と 3 次以上の接触（教科書 29 ページの問題 9）．これをメリットと感じるかどうかはあなたの問題なので，これ以上はお答えできません．数学の質問で「メリットは？」という聞き方は卑怯に感じます．もうすこし意味が明確な言葉を使うべきでは？

質問： 2 つの曲線は P における 3 次以上の接触をするとき，この点で曲率が一致し，これよりもっといい性質ありますか． **お答え：**曲率の弧長に関する微分も一致します．

質問： 2 つの曲線がある点 p で n 次の接触をするとき，n が大きいほどその 2 つの曲線が徐々に一致することを学びましたが，これは一般に m 次元空間の弧長 s でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ でも同じことが言えますか？

お答え： 同じことを言うためには「n 次の接触」を定義しなければなりませんね．講義で説明した定義（グラフ表示）は無効ですが，どうしましょう．

質問： 曲率円の定義で “曲線と同じ向きをつけた” とありますが，此れは曲率円が弧長 s によってパラメータ付されていると考えてよいのですか． **お答え：**「進行方向を同じにする」ということ．パラメータ付けは無関係．

質問： 曲率円の中心の式が出てきましたが，曲率円の中心にも図形的な意味があるのでしょうか．

お答え： 縮閉線．教科書 15 ページおよび付録 B-1.

質問： 2 つの相似な曲線を考える時，対応する点での曲率の比は曲線の相似比の逆の比になるのでしょうか．

お答え： そうです．簡単なので理由を考えてご覧なさい．

質問： $\dot{\gamma}$ と γ' の違いって何でしたっけ? **お答え：**教科書 12 ページ，2–3 行目．

質問： Frenet をなぜフルネと読むのですか．どこの国の人ですか．

お答え： Jean Freédéric Frenet (1816–1900). 生没地は Périguex だそうです．どこでしょう．

質問： κ は河童に由来するのでしょうか？

お答え： ギリシアは比較的乾燥しているので河童は住みにくいと思います．

質問： 4-2 $\gamma(s_0) = (x(s_0), y(s_0))$，$\gamma(s_0+t) = (x(s_0+t), y(s_0+t))$，$\gamma(s_0-t) = (x(s_0-t), y(s_0-t))$ から円の半径を求めようとしたのですが，上手いきません（原文ママ：上手く？）

お答え： そうですか（としか言いようがない）

質問： 4-1 の catenary だと思い，$\gamma(s) = (\sinh^{-1} s, \cosh(\sinh^{-1} s))$ に近づけようと思ったのですが，これも上手く行きませんでした． **お答え：**そうですか．

質問： 問題 4-1 について（中略）この曲線は $y = \cosh x - 1$ と表せるということで正しいでしょうか（結論がカテナリー曲線になるとなんだか嬉しい気持ちになりますね）．

お答え： 正しいです（もちろん，回転と平行移動を除いてです）．嬉しいですね．

質問： 今回の 4-1 は $\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ と $\kappa(s) = \theta'(s)$ から解いたのですが，Frenet の公式に κ を代入して $\mathcal{F}$ の微分方程式を解くのもできますか．もしそれで解けるのなら Frenet の公式というのは κ の関数から（原文ママ：「κ から」というべきでは？）$\gamma(s)$ を求めるためにあるということですか．

お答え： 前半：やってごらんなさい．後半：「2 次方程式の根の公式は＊＊のためにある」という＊＊を適切に挙げられますか? 多くの使い方があって「ためにある」と言い切ることはできないのでは? 「＊＊は＊＊のためになる」と言い切るのは大変に勇気がいることだと思います．

質問： 問 4-2 に関して $t \to 0$ とすると円 C_t が収束するということの定義はどのようなものですか．

お答え： 問題に明記されていないのですから，解答の方法は「この意味と定義すると収束する，ということを示す」「この意味と定義すると収束しないので問題が誤りであると結論付ける」のいずれかだと思いますがいかがでしょう．想定している定義：座標平面上の円は中心と半径を定めればただ一つきまるので，平面上の円全体の集合は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ と同一視できる．ただし $\mathbb{R}_+$ は正の実数全体の集合．$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ は $\mathbb{R}^3$ の開部分集合なので，ユークリッド距離に関する位相が入る．この位相について収束．

質問： 問題 4-3 で $\gamma''(L)$ を求める必要はありますか? **お答え：**なぜ必要と考えたのですか?

質問： 平面曲線の基本定理のところでは $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ と書いたのですが，その後，周期 L の曲率の所で $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ となりました．このような異なる定義域を書いたのはなぜですか?

お答え： 周期関数の定義域は自動的に実数全体になるからです．

質問： $t \in \mathbb{R}$ をパラメータとする曲線 $\gamma(t) = (\cos(2\arctan t), \sin(2\arctan t))$ は半径 1 の円を描きます．また s を弧長パラメータとして $\gamma(t)$ を弧長パラメータで表示したものの曲率関数は $\kappa\colon [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$，$\kappa(s) = 1$ となります．これは周期 2π の周期関数であり，さらに $\gamma(s+2\pi) = \gamma(s)$ が成り立ちます．このように $\mathbb{R}$ を動くパラメータ t によって定義されているが，弧長パラメータに変換すると s は $\mathbb{R}$ の真部分集合を動くことになってしまう「閉曲線」のような曲線は閉曲線とは呼ばないのですか．

お答え： 周期関数になっていれば定義域が $\mathbb{R}$ 全体に拡張できるので，閉曲線と考えてもよいと思います．ところで，ご質問の例ですが，弧長に変換すると，定義域は $(-\pi, \pi)$ になるはずです（arctan の値域はなにか）．すなわち，単位円から $(-1, 0)$ を除いた曲線なので，もともと閉じていません．

質問： 先週の授業で正則にづけられた（原文ママ：正則にパラメータづけられた）曲線は弧長でパラメータづけられると証明したのですが，関数 $y = f(x)$ が与えられると，もうそのままで x によるパラメータづけとみなせると考えていいですよね? また，パラメータづけられない曲線は存在するのですか? （あまりあるとは思えないのですが，あまりにぐちゃぐちゃすぎるとパラメータづけられないのでしょうか）．

お答え： 前半：教科書 4 ページの下から 4 行目．後半：この講義では「曲線」を定義していません．したがって，回答不能．「正則にパラメータづけられた曲線」を主に考えています．

質問： 思いつきませんでした． **お答え：**me, too.

5 空間曲線

■準備：外積

- 基底の正負（教科書 204 ページ）
- 外積（教科書 207 ページ）

■空間曲線の曲率と捩率

- 弧長によってパラメータ付けられた曲線（教科書 51 ページ）
- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$, 曲率 κ, 捩率 τ （教科書 51–52 ページ）
- フルネ・セレの公式（教科書 54 ページ）

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

問題

5-1 空間曲線 $\gamma(s)$ の $s=s_0$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s_0)$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s_0)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s_0)$ がそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向き，$\gamma(s_0)=0$ となるような座標系をとる．このとき，$s=s_0$ の近くでの曲線の像の xy 平面，yz 平面，zx 平面への正射影はどのような形になるか，図示しなさい．ただし s_0 における曲率と捩率はともに正の値をとるとする．

5-2 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率，捩率が

$$\kappa(s)=\frac{1}{1+s^2},\qquad \tau(s)=\frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする．

- ある一定な単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい．
- この $\boldsymbol{v}$ に対して，$\gamma(s)$ の，$\boldsymbol{v}$ の直交補空間への正射影 $\gamma^*=\gamma(s)-\bigl(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v}$ はどんな曲線か．

5-3 原点を中心とする半径 1 の球面上の曲線 $\sigma(t)$ ($|\sigma|=1$) が $\det(\sigma,\dot\sigma,\ddot\sigma)\neq 0$ を満たしているとする．このとき，

$$(*)\qquad \gamma(t):=\int^t\bigl(\sigma(u)\times\dot\sigma(u)\bigr)\,du$$

とおくと，γ は 0 でない曲率をもち，捩率が 1 となる曲線となる．逆に，曲率が 0 にならず，捩率が 1 となるような曲線 γ に対して，ある球面上の曲線 σ で (*) を満たすものが存在する．（ヒント：$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}$）

2017 年 10 月 26 日