2017 年 11 月 2 日 (2017 年 11 月 9 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 6

お知らせ

- 本日，定期試験の予告をします．欠席された方は講義 web ページや OCW で内容を確認して下さい．
- 今回の提出物締切は **2017 年 11 月 6 日（月）12:00** とします．

前回までの訂正

- 問題 4-2 の解説の板書で $\gamma(s) + t\boldsymbol{e}(s) + \frac{1}{2}t^2\kappa(s)\boldsymbol{e}(s) \Rightarrow \gamma(s) + t\boldsymbol{e}(s) + \frac{1}{2}t^2\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$
- 講義資料 5，2 ページ，下から 13 行目：29 ページ ⇒ 28 ページ
- 講義資料 5，3 ページ 10 行目：ピリオドが抜けています．

授業に関する御意見

- 授業内での問題解説ありがとうございます．自分にとって良い確認になっています．
  山田のコメント： ありがとうございます．
- 問題の解説をしていただけるとうれしいです．　**山田のコメント：** あなたは授業に出席していませんね．
- 3Q は 41 人なので教室を変えないが 4Q は 51 人になるから教室を変えるという話でしたが，10 人増えたのは，昨年 3Q で単位とれたが 4Q で単位とれなかった人が 10 人ほどいることを意味している気がしてなりません．何か心当たりはありますか...?
  山田のコメント： いいえ．
- 無事教科書入手できました．　**山田のコメント：** よかった．
- 教科書が手に入らないので教科書前提があると辛いです．　**山田のコメント：** なぜ手に入らないのですか?
- (5.3) のヒントは意地悪だと思います（顔文字略）ヒントを $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} \times (-\boldsymbol{n})$ の形でくれればよかったのに．
  山田のコメント： なるほど
- Frenet 枠の説明で描かれた図で $\boldsymbol{n}$ の方向がわかりにくく左手系にも見えてしまいました．しかたがない面もあるかと思いますが，曲線の奥方向，手前方向の向きを（ある程度）わかるようにしていただきたいです．
  山田のコメント： 難しいですね．どうすればよい?
- 先生は下側の黒板に書き終わったら上に上げていただくと見やすいので助かります! よろしくお願いします．
  山田のコメント： ごめんなさい．上げるタイミングが悪いようです．気をつけます．
- がんばって「部分」を使いこなそうと思います．　**山田のコメント：** そうそう．
- 弧長と書こうとすると，よく 2 つの漢字が混ざって「*」（ゆみへんに長）と書いてしまいます．
  山田のコメント： 「距離」もそうなるよね．
- 閉曲線についての内容があっという間に終わったのですが，あれ以上掘り下げないのですか．
  山田のコメント： 掘り下げれば面白い話はたくさんあるのですが，深入りすると他の話題に触れられないので割愛しました．ぜひ教科書を読んでみてください．
- 次元が増えると自由になりすぎて逆に煩雑になることがわかりました．
  山田のコメント： そうですかね．
- 正字・俗字の差異（「稠」に対する「*」（のぎへんに周），「捩」（右下が「大」でなく「犬」）に対する「捩」）はどう扱うのでしょうか．　**山田のコメント：** 山田はあまり気にしていません．
- 特に無し　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 弧長パラメータ s を用いて $\gamma(s)=\begin{pmatrix}\cos\theta(s)\\ \sin\theta(s)\end{pmatrix}$ と書く方法は，空間でも $\gamma'(s)=\begin{pmatrix}\sin\theta(s)\cos\phi(s)\\ \sin\theta(s)\sin\phi(s)\\ \cos\theta(s)\end{pmatrix}$ として行えるのでしょうか．

お答え： この表示だと，北極と南極で不都合がおきます．実際，そのような点では ϕ が決まりません．このことからご質問のような表示はあまりやらないようです．平面曲線と違って，角度による表示が考えづらいことが，曲線を積分表示する公式がないことの一つの理由になっていると思います．

質問： 空間曲線で曲率 κ を $|\boldsymbol{e}'|$ で定義して $\kappa \geqq 0$ としていましたが $\kappa<0$ の場合はどう考えるのでしょうか．あるいは負の曲率は定義しないのでしょうか．

お答え： 定義しない（できない，と説明した）．$\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n}$ で κ を決めるとき，κ の符号がきまるためには κ を定義する以前に $\boldsymbol{n}$ が決まらなければなりません．平面曲線ではそれができるのですが，空間曲線ではできません．

質問： $\boldsymbol{n}(s)$ を $\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{e}'(s)$ に選ぶ理由は単にこのベクトルは計算しやすい/表しやすいからですか?

お答え： 「計算しやすい」「表しやすい」のはどのベクトルでしょう．講義で説明しましたが $\boldsymbol{n}(s)$ は曲線の「もっとも曲がっている方向」を指しています．

質問： 捩率は $\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{e}'$，$\mathcal{F}'$ の表記を簡易にするために定義されているのでしょうか．左手系を数学でよく用いるのはどんな分野ですか．

お答え： 前半：なにを聞いているのか分かりません．すくなくとも $\boldsymbol{e}'$ と捩率は関係ありませんね．後半：数学ではあまりありません．CG などで使う，ということは講義で言及しました．

質問： 平面曲線では折り返しをすると曲率の符号が変わっていましたが，空間曲線では曲率の定義を考えると折り返しても曲率の符号は変わらないと思うのですが，捩率の符号が変わるのですか？

お答え： やってみよう．教科書 57 ページ，問題 1，58 ページ，問題 8 参照．

質問： 空間曲線にはフレームの取り方は任意性があるということですが，Frenet 枠の他にどんな取り方があるのでしょうか．/ 空間曲線には Frenet 枠以外にどんなフレームがあるのでしょうか? いくつか教えて下さい．

お答え： Darboux とか Bishop とか parallel frame で検索してみよう．次のような解説文があります："R. L. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, American Math. Monthly, vol 82 (1975), 246–251"．

質問： 授業で空間曲線のでは（原文ママ，「では」か？）Frenet 枠という特別なフレームをとるとあって思ったのですが，フレームとは何ですか．それと $\mathcal{F}$ はフレームの頭文字の F ですか．

お答え： 前半：ここでは空間曲線上の各点ごとに対応する $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底．後半：と講義でのべた．

質問： 今回は $\mathbb{R}^3$ 内のフルネ枠を定義しましたが，一般の $\mathbb{R}^n$ 内で，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ で成り立っていたフルネ・セレの公式と似たようなフレーム $\mathcal{F}$ を取ることはできますか? すなわち，「フレームを $(\boldsymbol{e}_1(s),\dots,\boldsymbol{e}_n(s))$ としたときに，

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1'(s)\\ \boldsymbol{e}_2'(s)\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa_1(s) & \dots & 0 & 0\\ -\kappa_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \kappa_n(s)\\ 0 & 0 & \dots & -\kappa_n(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1(s)\\ \boldsymbol{e}_2(s)\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n(s)\end{pmatrix}$$

となる $\kappa_1(s), \dots, \kappa_n(s)$ が存在する」ようなフレーム $\mathcal{F}$ は存在しますか．

お答え： 適切な仮定のもと，存在します（空間曲線でも $\kappa\neq 0$ を仮定しました）．詳しくは，たとえば「丹野修吉『多様体の微分幾何学』実教出版，1976」の第 3 章．ところでこの授業では，フレームの各ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ は列ベクトルで表していますので，あなたの記号と違ってきます．

質問： 捩率の定義が $\tau=-\boldsymbol{b}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$ となっていましたが，マイナスをつける理由はなんですか．

お答え： マイナスを付けない人もいます．"M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976" ではマイナスをつけていません．講義で説明しましたが，ここでマイナスをつけたのは「つるまき線」(第 6 回講義）が進行方向からみて反時計回りになるときを「正の捩率」としたかったからです．

質問： 捩率の図形的意味ってなんですか． **お答え：**たとえば問題 5-1.

質問： 問題 5-1 について「$s=s_0$ の近くで」とありますが，このような記述に対しては，どれほど近似してよいものなのでしょうか．平面曲線の場合は曲線が二階の微分までで表されるから二次，立体曲線（原文ママ：この講義では

「空間曲線」と呼んでいるはず）の場合は捩率が三階の微分までで表せることから三次で良いかと考えましたがこれは正しいでしょうか.

お答え： ある意味いい加減に考えます（こうならなくてはならない，という枠を最初に考えるのではなく，実際に式をみて考える）．具体的には「テイラー展開の最初に 0 にならない項」を見よ．

質問： 問題 5-1 と 5-2 を途中までやって挫折してしまいました．5-1 はブーケの公式をもちいて $\gamma(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = s - \frac{s^3}{6}\kappa(s_0)^2$（$s = s_0$ の近くなので誤差の項は無視した）と計算し，yz 平面への正射影は $\gamma(s) - (\gamma(s)\cdot\boldsymbol{e}(s))\boldsymbol{e}(s_0) = \gamma(s) - (\frac{s^3}{6}\kappa(s_0)^2)\boldsymbol{e}(s_0)$ となりましたが，この式からどう図示すればよいかがわかりませんでした．
5-2 も途中までやったのですが，後半の問いで，正射影 γ^* の式からどんな曲線かを考えることができないという 5-1 と同じようなところでつまってしまいました．ここから先どのように考えたらよいのでしょうか．

お答え： 前半：$\gamma(s_0)$ を原点にとり，$\gamma(s)$ を $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で表して（ブーケの公式）$\boldsymbol{e}$ をすてれば yz 平面への正射影が得られます．後半：平面曲線はどんな量から定まるでしょう．その量を計算してみましょう．

質問： 5-1 のような曲線の像の正射影を考えたとき「任意の正則曲線について，yz 平面への正射影は原点で滑らかでない」と考察しました（合ってますか？）滑らかな曲線が正射影では滑らかでないのは面白いです．

お答え： 合ってます．ただし「yz 平面」は座標系の取り方に依存するので,「$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{b}$ で張られる平面」(法平面という）と言ったほうがよいですね．

質問： 回転数はなぜ $i_\gamma =$（略）のように定義するのでしょうか? その背景を教えて下さい．

お答え： 講義でも説明しましたが，ガウス写像（平面曲線上の点に単位接ベクトルが定める単位円周上の点を対応させる写像）が円周を何回まわったかを表す量です．

質問： 平面曲線の全曲率が 2π の整数倍で表されるように，空間曲線の全曲率も 2π の整数倍となるのでしょうか．また空間曲線での $\int_0^l \tau(s)\,ds$（s は弧長パラメータ，l は周期）はやはり 2π の整数倍となるのでしょうか．それとも任意の実数となるのでしょうか．

お答え： どちらも整数になりません．全曲率については Fenchel の定理，Fary-Milnor の定理などで検索してご覧なさい．全捩率についてはもう少し最近の研究がいくつかあるようです．total tortion of space curves で検索するといろいろみつかります．

質問： 全曲率（回転数）が変形で不変ということでしたが，全曲率（回転数）を決めれば曲線が（変形を除いて）一意に定まりますか（「全曲率が等しい ⇒ 変形で同じ」）は成り立ちますか．

お答え： はい．教科書 33 ページ，定理 3.3.

質問： 教科書 p35 ジェネリックの定義を読みましたが，図 3.4 の 4 つめの曲線はジェネリックでない理由は，自己交叉において曲線の 3 つの断片があるからですか？

お答え： そうです．ジェネリックな曲線は，自己交叉では 2 つの断片が交わっていなければなりません．

質問： 今回までに平面曲線，空間曲線までを扱い（教科書を見る等では）次回から曲面を扱うようですが，$\mathbb{R}^n$ 内の曲線を考えることはしないのでしょうか? パラメータが増えすぎて扱いにくいだけで空間曲線と "似ている"（あいまいな表現で申しわけないです）のか，それとも大きく変わるところがあるのか.

お答え： 次回（11 月 2 日）は空間曲線の基本定理を扱う，と講義中に述べたはず．また $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の曲線を扱うというのは最初の講義で説明しました．とりあえず「話題を限っている」ということです．

質問： 捩率の「捩」の字は「身を捩る」など話し言葉ではたまに使うけれどもあまり使わない字なので先生の訂正が沢山入りそうですね．それはさておき「捩」の字にはねじる，ひねるといった意味がありますが，教科書を呼んでみてもねじり具合，ひねり具合を指しているようには私には見えないです．少しヒントをください．

お答え： $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\}$ が張る平面（接触平面 osculating plane）からどのくらい早く離れていくかという尺度です．平面上の針金をねじったときの「ねじり具合」のような感じ．

質問： 「捩」の字が大漢語林（初版）に掲載されておらず「＊」(捩の右下が「大」でなく「犬」) が載っていたのですが，どちらを使ってもよいのですか.

お答え： 犬の方が正字だそうです．一方，大となっている（俗字）のフォントが多いので，まぁどちらを使ってもよいのでしょう．教科書では正字の方を使っています．

質問： テストの難しさはどのくらいになりますか.

お答え： すごく....（少し真面目に答えると,「あなたがどのような人かわからないので答えられません」）

質問： 非常に分かり易かったです． **お答え：**何が?

質問： 特にないです．/特になし **お答え：**me,too

6 空間曲線の基本定理

■空間曲線の基本定理

- 線形常微分方程式の基本定理（この資料，教科書 202 ページの定理 A-2.2）
- 空間曲線の基本定理

■今回用いる事実 以下の事実（付録 A-2 の「線形常微分方程式の基本定理」からの帰結）を用いる：

定理． 区間 I の点 $t_0 \in I$ を一つ固定する．区間 I で定義され，n 次正方行列に値をとる C^∞-級関数 $\Omega(t)$ が与えられたとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}$ で，

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列} \tag{6.1}$$

をみたすものがただひとつ存在する．

証明は，常微分方程式論の教科書，あるいは「2017 年度幾何学特論 B1（2Q，MTH.B406）」の第 1 回講義ノート `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/geom-b/index-jp.html` を見よ．

系． 上の定理の状況で，さらに n 次正方行列 A が与えられているとする．このとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}_A$ で，

$$\frac{d\mathcal{F}_A}{dt} = \mathcal{F}_A\Omega, \qquad \mathcal{F}_A(t_0) = A \tag{6.2}$$

をみたすものがただひとつ存在する．

証明： (6.1) を満たす $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}$ (行列の積) とおけば，それが求めるものである．

問題

6-1 空間曲線 γ の曲率を κ (>0)，捩率を τ とする．空間曲線 $\tilde\gamma$ の曲率が κ，捩率が $-\tau$ であるならば，$\tilde\gamma$ と γ は向きを反転する $\mathbb{R}^3$ の等長変換で移り合う，すなわち

$$\tilde\gamma = A\gamma + \boldsymbol{c}, \qquad (A \in \mathrm{O}(3); \det A = -1, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3)$$

となる $A, \boldsymbol{c}$ が存在する．このことを示しなさい．
ヒント：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\kappa&0\\\kappa&0&-\tau\\0&\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-\kappa&0\\\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}.$$

6-2 曲率が零点をもたないような空間曲線の像が，$\mathbb{R}^3$ のある平面 Π に含まれるための必要十分条件は捩率が恒等的に 0 となることである．このことを示しなさい（ヒント：従法線ベクトルが一定であることを示す）．

2017 年 11 月 2 日 (2017 年 11 月 9 日訂正)