幾何学概論第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し，正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は **11 月 21 日**以降，**数学事務室（本館 3 階 332B）** にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2017 年 11 月 27 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

問題 A [50 点] 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{23}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい.

- xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の，関数のグラフ $y=\dfrac{1}{a}\cosh(ax)$ で表される曲線[1] を C とする．ただし a は正の定数である．C 上の点の x 座標を t と書くと，この曲線は $\gamma(t)=(\boxed{1},\boxed{2})$ とパラメータ表示できる．とくに，区間 $[0,T]$ に対応する曲線の弧長は $\boxed{3}$ と表せるので，$s(t)=\boxed{4}$ は弧長関数となる．これにより C を $\tilde{\gamma}(s)=(\boxed{5},\boxed{6})$ と弧長パラメータ s で表示することができる．パラメータ表示された曲線 $\tilde{\gamma}(s)$ の単位接ベクトル（単位速度ベクトル）は $\boldsymbol{e}(s)=(\boxed{7},\boxed{8})$，左向き単位法ベクトルは $\boldsymbol{n}(s)=(\boxed{9},\boxed{10})$ なので，$\tilde{\gamma}$ の曲率関数は $\kappa(s)=\boxed{11}$ となる．とくに C 上の x 座標が 1 となる点におけるこの曲線の曲率は $\boxed{12}$ である.
- 弧長 s によりパラメータ表示された空間曲線
  $$\gamma(s)=\big(x(s),y(s),z(s)\big)\qquad x,\ y,\ z \text{ は } \mathbb{R} \text{ の区間 } J \text{ で定義されたなめらかな関数}$$
  に対して，$\boldsymbol{e}(s)=\gamma'(s)$ $({}'=d/ds)$ とおくと $\boldsymbol{e}(s)$ の大きさは $\boxed{13}$ であるから $\boxed{14}$ が成り立つので[2]，各 $s\in J$ に対して $\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{e}'(s)$ は直交する．曲線 γ の曲率 κ を s の関数として $\kappa(s)=\boxed{15}$ のように定義する．<u>以下，κ が零点をもたない場合のみを考える.</u> 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$，振率 $\tau(s)$ を $\boldsymbol{n}(s)=\boxed{16}$, $\boldsymbol{b}(s)=\boxed{17}$, $\tau(s)=\boxed{18}$ と定義する.
- 上の状況で，曲率 $\kappa(s)$ と振率 $\tau(s)$ が $\underline{\tau(s)=2\kappa(s)}$ $(s\in J)$ を満たしているとする．このとき，s によらず一定な単位ベクトル $\boldsymbol{d}$ で $\gamma'(s)$ と一定な角をなすものが存在することを示そう．各 $s\in J$ に対して $\{\boldsymbol{e}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を与えるから，ベクトル $\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^3$ に対して
  $$\boldsymbol{d}=u(s)\boldsymbol{e}(s)+v(s)\boldsymbol{n}(s)+w(s)\boldsymbol{b}(s)\qquad(s\in J)$$
  を満たすなめらかな関数 $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ が存在する．このように定めた $\boldsymbol{d}$ について，
  - $\boldsymbol{d}$ が単位ベクトルであるための必要十分条件を u, v, w を用いて表すと $\boxed{19}$ である.
  - $\boldsymbol{d}$ と $\gamma'(s)$ のなす角が一定であるための必要十分条件を u, v, w を用いて表すと $\boxed{20}$ である.
  - $\boldsymbol{d}$ が s によらず一定であるための必要十分条件を u, v, w を用いて表すと $\boxed{21}$ である.

  これらから，$\boldsymbol{d}=\boxed{22}$ とおくと，s によらない単位ベクトルで，γ' と一定の角 $\boxed{23}$[3] をなすことがわかる.

裏面に続く

[1]「曲線」という語は講義では明確に定義していないが，ここでは，この関係式を満たす $\mathbb{R}^2$ の点の集合のことを表すことにする.
[2] $\boxed{14}$ にはあとの「直交する」の理由となる式変形を入れる.
[3] $\boxed{23}$ には角の大きさを入れる.

問題 B 次の主張は正しいか．正しいなら○を，そうでないなら×を解答欄の [　] 内に記し，理由を述べなさい． [50 点]

(1) 弧長によりパラメータづけられた 2 つの平面曲線 $\gamma(s)$, $\tilde{\gamma}(s)$ の曲率 $\kappa(s)$, $\tilde{\kappa}(s)$ が，$\tilde{\kappa}(s) = m\kappa(s)$ (m は正の定数) を満たしているならば，$\gamma(s)$ と $\tilde{\gamma}(s)$ は回転・平行移動と相似拡大・縮小で移り合う．

(2) 弧長でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期関数ならば，$\gamma(s)$ は閉曲線を与える．

(3) 正則にパラメータ表示された空間曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数 $\kappa(t)$ が零点をもたないとする．このとき，$\mathbb{R}^3$ 内の平面に $\gamma(t)$ を正射影して得られる曲線 $\tilde{\gamma}(t)$ はその平面内の正則曲線である．

(4) 弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) の曲率 $\kappa(s)$ が $\kappa(0) = 0$，$\kappa(s) \neq 0$ ($s \neq 0$) を満たしているとする．このとき，$s \neq 0$ に対して捩率関数 $\tau(s)$ が定義できるが，$\lim_{s\to 0} \tau(s) = 0$ である．

(5) 捩率が恒等的に零であるような空間曲線の像は，$\mathbb{R}^3$ のある平面に含まれる．

問題 C [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

おつかれさまでした ♡

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄

1 t	2 $\frac{1}{a}\cosh at$	3 $\frac{1}{a}\sinh aT$	4 $\frac{1}{a}\sinh at$

5 $\frac{1}{a}\log(as+\sqrt{1+a^2s^2})$	6 $\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2s^2}$	7 $\frac{1}{\sqrt{1+a^2s^2}}$	8 $\frac{as}{\sqrt{1+a^2s^2}}$

9 $\frac{-as}{\sqrt{1+a^2s^2}}$	10 $\frac{1}{\sqrt{1+a^2s^2}}$	11 $\frac{a}{1+a^2s^2}$	12 $\frac{a}{\cosh^2 a}$

13 1	14 $0=(\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s))'=2\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{e}'(s)$

15 $\lvert\boldsymbol{e}'(s)\rvert$	16 $\frac{\boldsymbol{e}'(s)}{\kappa(s)}$	17 $\boldsymbol{e}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$	18 $-\boldsymbol{b}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$

19 $\bigl(u(s)\bigr)^2+\bigl(v(s)\bigr)^2+\bigl(w(s)\bigr)^2=1$	20 $u(s)$ は定数

21 $u'(s)-\kappa(s)v(s)=0,$ $\kappa(s)u(s)+v'(s)-\tau(s)w(s)=0,$ $w'(s)+\tau(s)v(s)=0$	22 $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}(s)+\boldsymbol{b}(s))$	23 $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

1–2/3–4/5–6/7–8/9–10/11–12/13–14/15–18/19–21/22–23；各 5 点

問題 A:
- 3; 4: 双曲線関数を使わないでわざわざ指数関数を用いて解答した方はなにか宗教上の理由でもあるのでしょうか.
- 14: $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}'=0$ は「$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{e}'$ が直交する」ことと同義（線形代数でならう「直交する」の定義は内積が消えること）. したがって「理由」を書いたことにはなりません.
- 22: $\mathbb{R}^3$ のベクトルの形（すなわち $(*,*,*)$ の形）で解答されたかた若干名. 問題の状況は $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ等長変換で不変なはずですから,「成分決め打ち」のベクトルになるわけがないです.

問題 B:
- ○, ×が正しくない, または理由が正しくなければ 0 点です.
- 「理由」が多少不正確な場合は 0 点にせず 5 点としていることがあります.

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 各 10 点

(1) [×]

問題 A の最初の $y=\dfrac{1}{a}\cosh ax$ のグラフは，$y=\cosh x$ のグラフを $\frac{1}{a}$ 倍に相似拡大したものである．いま，$y=\dfrac{1}{a}\cosh ax$ のグラフを弧長でパラメータづけて $\gamma_a(s)$ と表すと，$\gamma_a(s)$ の曲率関数は $a/(1+a^2s^2)$ となる．一方，$\gamma_1(s)$ の曲率関数 $\kappa_1(s)$ は $1/(1+s^2)$ なので，これらの比は一定でない．すなわち，$\kappa_1(s)$ の定数倍の曲率をもつ曲線は，どんな a に対しても $\gamma_a(s)$ と合同ではない．

相似拡大・縮小は，弧長パラメータを保存しないことに注意．

(2) [×]

周期関数 $\kappa(s)=\cos s+\frac{1}{3}$ に対して，平面曲線の基本定理より，s を弧長パラメータ，κ を曲率関数とする平面曲線 $\gamma(s)$ が存在する．とくに $\gamma'(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$ と書くと $\theta'(s)=\kappa(s)$ なので

$$\theta(2\pi)-\theta(0)=\int_0^{2\pi}\left(\cos u+\frac{1}{3}\right)du=\frac{2\pi}{3}$$

なので $\boldsymbol{e}(2\pi)\neq\boldsymbol{e}(0)$．速度ベクトルが周期的でないので γ は閉曲線ではない．

「$\gamma(s+L)=A\gamma(s)+\boldsymbol{b}$ （$A\in\mathrm{SO}(2)$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$）となるので閉曲線ではない」では理由になっていない．実際，閉曲線はこの性質を満たしている（$A=I$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ という特別な場合）．そうでない場合が実際起きうることを示さなければならない．

(3) [×]

空間曲線 $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$ は，$\dot\gamma(t)=(1,2t,3t^2)\neq\boldsymbol{0}$ なので正則曲線を与える．さらに $\ddot\gamma(t)=(0,2,6t)$ は $\dot\gamma(t)$ と一次独立なので曲率は零でない．しかし，これを yz-平面に正射影して得られる曲線

$$\tilde\gamma(t)=(t^2,t^3)$$

は $t=0$ で特異点をもつ．

この問題に限らず「$\det(\dot\gamma,\ddot\gamma)$」と書いている人がいましたが，空間曲線の場合，考えている行列が正方行列にならないので “det” はナンセンスです．

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄（つづき） 各 10 点

(4) [×]

$k(s) = s^2$, $t(s) = 1$ とおくと,

$$\mathcal{F}'(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \qquad \mathcal{F}(0) = I = \text{単位行列} \qquad \left(\Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -t(s) \\ 0 & t(s) & 0 \end{pmatrix}\right)$$

を満たす行列値関数 $\mathcal{F}(s)$ がただ一つ定まる．とくに Ω が交代行列で初期条件が単位行列なので，$\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(3)$ が任意の s に対して成り立つ．したがって $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s))$ と書くと，各 s に対して $\{\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$ は正規直交基底を与える．そこで

$$\gamma(s) := \int_0^s \boldsymbol{e}_1(u)\,du$$

と定めると，これは空間曲線で，$\gamma'(s) = \boldsymbol{e}_1(s)$ は単位ベクトルなので，s は弧長パラメータを与えている．さらに，最初の微分方程式から $\boldsymbol{e}_1'(s) = k(s)\boldsymbol{e}_2(s)$ なので，$|\boldsymbol{e}_1'(s)| = s^2$ となり，γ の曲率は $\kappa(s) = s^2$，とくに $s = 0$ での曲率は 0 である．さらに $s \neq 0$ のときの主法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_2(s)$，従法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_3(s)$ となることがわかるので，捩率は $\tau(s) = -\boldsymbol{e}_3'(s) \cdot \boldsymbol{e}_2(s) = t(s) = 1$．とくに $\lim_{s \to 0} \tau(s) = 1$.

(5) [○]

弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ のフルネ枠を $(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ とする．捩率が 0 となることから，$\boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{n}(s) = 0$ なので，従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ は定ベクトル．したがって，$\gamma(s)$ の定義域に含まれる s_0 を一つ固定して，

$$f(s) := (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \boldsymbol{b}$$

とおくと，

$$f'(s) = \gamma'(s) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}(s) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

すなわち $f'(s)$ は定数なので，

$$f(s) = (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \boldsymbol{b} = f(s_0) = 0.$$

したがって $\gamma(s)$ は点 $\gamma(s_0)$ をとおり $\boldsymbol{b}$ に垂直な平面に含まれる．

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 C [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 4 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **4 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	