2017 年 12 月 7 日 (2017 年 12 月 14/21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 2

提出物へのコメント

- 今回の提出物で捕捉された「講議」1 件,「成積」1 件．何かの嫌がらせですか?
- “ξ” を “ε” と書いたもの 1 件．これらは違う字です．たとえば試験の答案なら減点案件です．

前回までの訂正

- 講義資料 1, 2 ページ，日程表，第 8 回の日付：02 月 09 日 $\Rightarrow$ 02 月 08 日
- 講義資料 1, 4 ページ，(1.3) 式：$\displaystyle\int_a^b \left|\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t)\right|^2 dt \Rightarrow \int_a^b \left|\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t)\right| dt$
- 講義資料 1, 4 ページ，問題 1-1 (3)：$\gamma(t) = (0, v) \Rightarrow \gamma(t) = (0, t)$.
- 曲面の正則性の条件の板書で誤りがあったというご指摘がありました：

$$\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & y_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

- 講義の最後の板書で $|p_u \times p_v| = EG - F^2$ とあったというご指摘がありました．正しくは $|p_u \times p_v|^2 = EG - F^2$.

授業に関する御意見

- 漢字ミスについては大事なことなので 2 回言ったんですね． **山田のコメント：** そうです．でもまだ間違える人がいる．
- 講義をよく聞き，よい成績をとれる確率を上げていこうと思います．(原文ママ) **山田のコメント：** はい，正しい字ですね ♡
- テスト返却儀式が怖いです．(「そんなことないよ？ ♡」と言われそうですが. . .) **山田のコメント：** 存分に怖がるがよい．
- 先生の web ページで,「幾何学概論第二」をクリックすると「幾何学概論第一」に飛ばされるので,「幾何学概論第二」のページに飛ぶようになおしてください． **山田のコメント：** ありがとうございます．修正しました．
- 双曲線関数の扱いがまだまだ下手だなと痛感しました． **山田のコメント：** すぐに慣れます．
- 黒板に新しく定められた言葉があるとき，英語での名称も書いてくれて嬉しいのですが，もう少しだけ見やすいように書いてほしいです．/英単語を板書するときは普段よりもていねいに書いてほしい．(日本語と違って何が書いてあるのかが予測できないため) /黒板に書かれた ellipsoid，hyperboloid の “–oi–” の部分と，Beltrami の “–rami” の部分が読めませんでした． **山田のコメント：** 了解．ところで筆記体は読めますか？
- 教室が変わってよかったです． **山田のコメント：** 私もです．
- 教室は広いため，先生の声がよく聞こえないことは時々ありました． **山田のコメント：** ごめんなさい．マイク必要？
- 教室の場所変わったんですね． **山田のコメント：** 3Q の授業中に何回かアナウンスしましたが.
- 教室はずっとこの教室でしょうか． **山田のコメント：** はい．
- 4Q もしっかり学んでいきます． **山田のコメント：** よろしく
- 講義中の山田先生の笑顔を見ていると，幸せな気分になってきます．日々笑顔で過ごすために心がけていることなどあるのでしょうか． **山田のコメント：** 癖になっているだけです．
- 4Q からの受講です．よろしくお願いします． **山田のコメント：** こちらこそ．

質問と回答

質問 1： 教科書 p74 の式 (7.13) の下の文，$\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$ は正則な行列と書いてあるのですが，どうして正則な行列になるのでしょうか（ヤコビ行列（原文ママ：ヤコビ行列式?）は 0 でないからですか？） **お答え：**講義資料 1, 3 ページの問 1.3.

質問 2： テキストでは φ: $(\varepsilon, \eta) \mapsto (u, v)$ （原文ママ：テキストでは (ξ, η).）に対し，φ のヤコビ行列を $A = \begin{pmatrix} u_\varepsilon & u_\eta \\ v_\varepsilon & v_\eta \end{pmatrix}$ で表しています（山田注：テキストでは J．なぜ違う記号を使う?）が，これを転置したもの A^T を用いることで何か不都合が起きるのでしょうか? (ヤコビ行列式 $\det A = \det A^T$ なので，あまり影響がなさそうに見えますが)

お答え： 転置の記号はテキストでは ${}^tA$．回答：今回の講義資料の (2.4) のような掛け算ができるようにこう配置した．

質問 3： 微分同相写像はなぜ “微分” と付くのですか? 単に写像と逆写像が C^∞ 級だからですか．それとも微分ともっと密接な関係があったりしますか． **お答え：**たぶん「可微分同相写像」(これもよく使う）が実体を表した名前だと思いますが，誤って「可微分な同相写像」と書くと，同相写像で可微分なもの（C^∞ 級かつ同相写像）ととられる可能性があるので，ここでは「微分同相写像」という（一単語に見える）語を用いています．

質問 4： $0 = F(x, y, z)$ と $p(u, v) = (x, y, z)$ が同じ曲面を表すとき，$\operatorname{grad} F = \mathbf{0}$ となる特異点と p_u と p_v が 1 次独立でないという特異点は必ず一致しますか．教科書のホイットニーの傘とカスプ辺について計算したところ一致しましたが，一致しない例があれば知りたいです．

お答え： 講義で扱った例で，$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $p(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$．$(u, \pi/2)$ は p の特異点で，北極 $(0, 0, 1)$ に対応するが，その点で $\operatorname{grad} F$ は零ベクトルではない．

質問 5： §7 章（原文ママ：§7 だけで Section 7 の意味）の必要性の証明「...曲線 $(u_0+t\cos\alpha, v_0+t\sin\alpha)$ $(0 \leqq t \leqq c)$ を考える」の所では，これは点 (u_0, v_0) を通り，u 軸方向と角度 α をなす直線だと思うのですが，この証明は任意の曲線について示しているのでしょうか. **お答え：** 必要性の部分は「**仮定：** 任意の曲線に対して...**結論：** $E=G=1$, $F=0$」だから，任意の曲線に対して示す必要はない．仮定のうちいくつかの条件を使って結論が導ければ証明になっています．

質問 6： 問題 1-1 は $x=\operatorname{sech} v$, $z=v-\tanh v$ $(v>0)$ とパラメータ表示された曲線を z 軸の回りに回転させた回転体（原文ママ：回転面？）は擬球と呼ばれるものであるとのことでしたが，(4) で求めた極限は擬球の “表面積”（山田注：面積でよい？）であり，それが 2π となるのは，半径 1 の球面の上半分の面積が 2π となることに似ており，たしかに擬球は球に似ていると感じました．調べてみると，この擬球の “体積” は （山田注：擬球面に囲まれる領域の体積？）半径 1 の半球の体積 $\frac{2\pi}{3}$ になるらしいのですが，擬球の “体積” を計算してみると，回転体の体積の公式により，$\int_{v=0}^{v=\infty}\pi x^2\,dz=\int_0^\infty \pi\operatorname{sech}^2 v\tanh^2 v\,dv=\frac{\pi}{3}$ となり，$\frac{\pi}{3}$ になってしまいます．一体どこが間違っていたのでしょうか. **お答え：** v の範囲を $(-\infty,\infty)$ とすると $\frac{2\pi}{3}$ になる．

質問 7： 平面上の長さ $\mathcal{L}$ の単純閉曲線 $\gamma(s)$ の重心を P としたときに $\mathrm{P}=\frac{1}{\mathcal{L}}\int_0^{\mathcal{L}}\gamma(s)\,ds$ でしたが，単純閉曲線 $\gamma(s)$ で囲まれる領域を D として，D の重心を P' としたときに，実際に P と P' の点が異なることはありうるでしょうか.

お答え： たとえば三角形でこれらを計算してごらんなさい.

質問 8： プリントでは面積は定義 (:=) として書かれていましたが，幾何学概論第 1 の講義資料 2 の問 2-3 での等式 $\sup\{\mathcal{L}_\Delta \mid \Delta は I の分割\}=\int_a^b\sqrt{1+(f')^2}\,dx$ が成り立つように，曲面に何か分割を与えることによって平面で曲面を近似するとして，その平面の表面積の上限は $\iint_{\overline{V}}|p_u\times p_v|\,du\,dv$ に等しいですか？ **お答え：** はい.

質問 9： 解析学概論では「面積」のところで p は V 上で 1 対 1 という条件もありましたが，幾何学概論ではそれは暗黙に仮定されているのでしょうか. **お答え：** 仮定していない（自己交叉をもつ曲面でも面積を考えたい).

質問 10： 様々なパラメータ表示を平等に扱う必要あり，の “平等” とはどういうことをさすのでしょう？

お答え： 曲線の「弧長」のような特別な地位をもった助変数はないということ．曲線の曲率などは，弧長パラメータで定義してから一般の助変数に関する表示を導いたが，曲面の不変量は最初から一般の助変数で定義する必要がある.

質問 11： 授業中に言っていた “ひとつの曲面をひと組のパラメータ表示しきれないからいくつかのパラメータ表示を貼り合わせる必要がある” とは，場合分けをしてパラメータを設定しなければならないということでしょうか? もしもそうなら曲線でも同じことが言える例がありそうですが. **お答え：** 少し違うと思います．講義で説明した「球面」の例はどうですか.「曲線でも」の部分，何を想定していますか（記述からは読み取れませんでした).

質問 12： 2 次曲面は変なものを除けば楕円面，一様双曲面，二葉双曲面のどれかと合同になる（原文ママ：楕円放物面・双曲放物面が抜けている）ということについて，変なものの例として $x^2+y^2+z^2=-1$ （空集合）をあげていましたが，これは空集合も曲面と考えられるということでよろしいですか？ **お答え：** あまりよろしくありません.「2 次曲面」($\mathbb{R}^3$ の座標の 2 次式の零点集合）が一語で，それが曲面とは言っていない，と思って下さい．この講義では曲面をきちんと定義してはいませんが.

質問 13： 曲線，曲面に滑らかという概念があるなら，変形にも滑らかな変形が存在するのでしょうか. **お答え：** 曲線については授業で少しだけ扱った（教科書 §3)．曲面についても同様な変形を考えられます．たとえば「球面の裏返し」で検索.

質問 14： 授業で (8) のところ（黒板番号)（図省略）なぜ z 軸を軸として回転したあと次の図では xy 軸でなく xz 軸となっているのですか. **お答え：** 図がおかしいと思います．回転軸が z 軸なら母線が含まれるのは xz 平面か yz 平面．xy 平面ではない.

質問 15： xz 平面上に（原文ママ：「の」だと思う）なめらかな曲線 γ を回転した回転面はなめらかさを維持しますか.

お答え： 講義で紹介した助変数表示を用いて正則性の条件がいつ成り立つか確かめてご覧なさい.

質問 16： クラインの壺の曲面積は普通に計算できますか. **お答え：**「クラインの壺」は位相的性質で，曲面として実現する方法はさまざまです．したがって「クラインの壺の面積」は意味がありません．ひとつパラメータ表示を与えれば計算できます.

質問 17： 曲面上の特異点はどういう性質を持ちますか. **お答え：** いろいろ．たとえば教科書 §6 の末尾，付録 B-8.

質問 18： 第一基本量を用いて第一基本形式，第二基本形式を表すことを少しだけ勉強しました．第一基本形式，第二基本形式はどれも 2×2 の対称行列となっているので，いまの講議であった 2 次形式の標準化が使えることがわかったのですが，2 次曲面の標準化する前と後の行列式が一致するという情報は今後の講義のキーとなりますか？

お答え： (1) なんで「講議」って書くの？講義を聞いていませんでしたか？ (2) 第一基本量を用いて第二基本形式を表すことはできません．(3) この教科書では第一基本形式や第二基本形式を 2×2 対称行列として扱っていません．対応する行列を第一（第二）基本行列と呼んでいます．(4) 第一・第二基本行列の標準化と 2 次曲面の標準化は直接関係ありません.

質問 19： テストや成積を（原文ママ：助詞の選択が不適切では？）5 点刻みに拘るのは何か理由がありますか？

お答え： わざと「成積」と書くのは理由がありますか？嫌がらせですか？回答：「1 点の差」に意味があるとは思えない.

質問 20： 放物線/面の「放」は「抛」と書いても大丈夫でしょうか. **お答え：** 大丈夫です（むしろ後者の方が正しい).

質問 21： 板書の中で領域が U（山田注：$\mathcal{U}$？）で表されていましたが，これは大文字のユーですか. **お答え：** はい.

質問 22： 平面の直線が曲面をなしたときのベクトルの考え方が分かりませんでした.

お答え：「質問」でなく，分からなかったという「宣言」ですね.「直線が曲面をなした」とはどういうことでしょうか.

質問 23：（大体の）2 次曲面は一（二）葉双曲面，楕円面，楕円放物面，双曲放物面のどれかに合同というのがフシギだなと思いました. **お答え：** そうですか（としか答えようがない).「自分で証明してみれば不思議でも何でもない」ことが分かります.

質問 24： $\mathbb{R}^n$ 上の $n-1$ 次元球面のパラメータの付けかたは 2 次元の場合と同じですか.

お答え： たぶん「同じです」という回答が（山田と文脈を共有する人にとっては）正しいのですが，その回答を聞いて $n-1$ 次元球面のパラメータ表示を自分でつくれますか？すなわち「同じ」で何を表しているのですか？

質問 25： 高次元化することによる利点や分かることってどんなものがあるんでしょうか?

お答え： 扱ってみるとわかります．少くとも一般相対性理論の舞台は 4 次元ローレンツ多様体ですね．弦理論だと?

2 第一基本形式・第二基本形式

■パラメータ変換（再掲）

定義 2.1. $\mathbb{R}^2$ の領域 D から $\mathbb{R}^2$ の領域 U への写像

$$\varphi\colon D \ni (\xi,\eta) \longmapsto (u,v) = \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \in U \tag{2.1}$$

が**微分同相写像** diffeomorphism であるとは，[1] φ は全単射．[2] φ と φ^{-1} はともに C^∞-級となること．

問 2.2. 式 (2.1) の φ が微分同相写像ならば，D の各点で次が成立することを示しなさい：

$$\det J \neq 0 \qquad J := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}. \qquad (J \text{ を } \varphi \text{ のヤコビ行列 (Jacobian matrix) という．}) \tag{2.2}$$

問 2.3. 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ と，(2.1) の形の微分同相写像 φ に対して $\tilde p(\xi,\eta) := p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ とおくと， $\tilde p\colon D \to \mathbb{R}^3$ は正則な曲面のパラメータ表示を与えることを示しなさい．この $\tilde p$ は「p からパラメータ変換 φ で得られる」という．誤解の恐れがないときは，$\tilde p(\xi,\eta)$ を $p(\xi,\eta)$ と書くことがある．

問 2.4. 曲面の面積はパラメータのとりかたによらないことをきちんと述べて示しなさい．

■単位法線ベクトル 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ ($U \subset \mathbb{R}^2$ は領域) に対して $\mathrm{P} := p(u_0, v_0)$ ($(u_0,v_0) \in U$) を一つ固定するとき，$p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ は 1 次独立なベクトルである．

- $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が生成する 2 次元空間は，曲面 S の P における接平面に平行である．
- 零でないベクトル $p_u(u_0,v_0) \times p_v(u_0,v_0)$ の向きは，S の P における接平面に垂直な方向を与える．

定義 2.5. 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，

- $(u,v) \in U$ における（または $\mathrm{P} = p(u,v)$ における）S の**単位法線ベクトル**とは，P における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである．
- なめらかな写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ が，パラメータ表示された曲面 p の**単位法線ベクトル場**であるとは，各 (u,v) で $\nu(u,v)$ が p の (u,v) における単位法線ベクトルを与えていることである．

問 2.6. (1) 曲面の助変数表示 $p(u,v)$ に対して $\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ は単位法線ベクトル場である．

(2) $\tilde p$ を問 2.3 のように p からパラメータ変換で得られる曲面とするとき，次を示しなさい：

$$\frac{\tilde p_\xi \times \tilde p_\eta}{|\tilde p_\xi \times \tilde p_\eta|} = \varepsilon \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\det \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

ただし，この等式の右辺は $\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ における値を，左辺は (ξ,η) における値を表す．

(3) $\hat p(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{q}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$) とおくとき，次を示しなさい：

$$R\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \varepsilon \left(\frac{\hat p_u \times \hat p_v}{|\hat p_u \times \hat p_v|}\right) \qquad \varepsilon = \det R.$$

2017 年 12 月 7 日 (2017 年 12 月 14/21 日訂正)

■曲面の接平面・接ベクトル空間． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ において曲面に接するベクトルは

$$\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0) \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \tag{2.3}$$

の形に表される．正則性の条件から (2.3) の形のベクトル全体は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元線形部分空間を与える．これを曲面 $p(u,v)$ の P における**接ベクトル空間**・**接平面**とよび V_{P} と書く[*1]．ベクトルの組 $\{p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\}$ は，接平面の一つの基底を与える．

問 2.7. 曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ が曲面 $p(u,v)$ からパラメータ変換 $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$ で得られるとき，

$$(\tilde{p}_\xi,\tilde{p}_\eta)=(p_u,p_v)J \qquad (J \text{ は (2.2) のヤコビ行列}) \tag{2.4}$$

が成り立つことを示しなさい．ここで p_u, p_v などは列ベクトル，(p_u,p_v) はそれらを並べた 3×2 行列．

■接平面と $\mathbb{R}^2$ との対応． いままでの状況で，曲面の点 P における接平面 V_{P} と $\mathbb{R}^2$ の間に線形同型

$$V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \tag{2.5}$$

が得られる．この第一成分，第二成分をそれぞれ

$$\begin{aligned} du\colon V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\alpha\in\mathbb{R},\\ dv\colon V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\beta\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{2.6}$$

と書けば，du, dv は V_{P} から $\mathbb{R}$ への線形写像である[*2]．

問 2.8. 問 2.3 のようなパラメータ変換で曲面を (ξ,η) によってパラメータ表示するとき，同様に V_{P} から $\mathbb{R}$ への線形写像 $d\xi$, $d\eta$ を考えることができる．このとき，次を確かめなさい．

$$\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}d\xi\\ d\eta\end{pmatrix} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} du=u_\xi\,d\xi+u_\eta\,d\eta\\ dv=v_\xi\,d\xi+v_\eta\,d\eta\end{cases} \qquad (J \text{ は (2.2) のヤコビ行列}). \tag{2.7}$$

問 2.9. 変数 (u,v) に関する C^∞-級関数[*3] $f(u,v)$ を考える．問 2.3 のようなパラメータ変換により $\tilde{f}(\xi,\eta)=f\bigl(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\bigr)$ と定めるとき，次を確かめなさい：

$$\tilde{f}_\xi\,d\xi+\tilde{f}_\eta\,d\eta=f_u\,du+f_v\,dv. \tag{2.8}$$

問 2.9 の状況で，誤解の恐れがないときは $\tilde{f}(\xi,\eta)$ を $f(\xi,\eta)$ と書いてしまうことがある．このとき (2.8) は $f_\xi\,d\xi+f_\eta\,d\eta=f_u\,du+f_v\,dv$ と書ける．いま

$$df:=f_u\,du+f_v\,dv \tag{2.9}$$

とおき，これを f の**微分**，**全微分**または**外微分**とよぶ．すると問 2.9 は「**関数の全微分はパラメータのとり方によらない**」と言い換えることができる．

[*1] 記号 V_{P} はこの場での一時的なものである．一般的には $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ などと書くべきだが，この記号の構成要素を説明するのが面倒なのでこのような記号を用いた．多様体を学んだあとで「定義域の接空間の，はめこみの微分写像による像」という文が通じると思う．

[*2] 一般に $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V から $\mathbb{R}$ への線形写像を**線形形式**または**一次形式**という．

[*3] ここでは，とくに断らない限り関数などの微分可能性は C^∞ を仮定する．以後，しばしば C^∞-級を省略する．

■2 次形式（線形代数の復習）． 以下 V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元線形空間とする．

定義 2.10. 写像 $b\colon V\times V\to\mathbb{R}$ が**対称双線形形式**または **2 次形式**であるとは (1) 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $b(\boldsymbol{v},\cdot):V\to\mathbb{R}$, $b(\cdot,\boldsymbol{v})\colon V\to\mathbb{R}$ がともに線形写像（双線形性），(2) 任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}\in V$ に対して $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=b(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ （対称性）をみたすことである．

例 2.11. 線形空間 V の**内積**とは，V の対称双線形形式 g で，次の性質（正値性）を満たすものである：任意の $\boldsymbol{v}\in V\setminus\{0\}$ に対して $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$.

問 2.12. 線形空間 V 上の対称双線形形式 b があたえられているとする．V の基底 $\mathcal{A}:=\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ をひと組とるとき，次を確かめなさい：

$$b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\sum_{i,j=1}^{n}v_iw_jb_{ij}\qquad\left(\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v_i\boldsymbol{a}_i,\quad\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^{n}w_j\boldsymbol{a}_j,\quad b_{ij}:=b(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)\right).$$

ここに現れる n 次対称行列 $B=(b_{ij})$ を，**対称双線形形式 b の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する表現行列**という．

問 2.13. 問 2.12 の状況で，

$$V\ni\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v_i\boldsymbol{a}_i\longmapsto\hat{\boldsymbol{v}}:={}^t(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$$

により V と $\mathbb{R}^n$ を同一視すると $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})={}^t\hat{\boldsymbol{v}}B\hat{\boldsymbol{w}}$ と書けることを確かめなさい．

問 2.14. 問 2.12, 2.13 の状況で，別の V の基底 $\{\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n\}$ をとると，n 次正則行列 $J=(m_{ij})$（**基底変換行列**）が存在して

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_j=\sum_{k=1}^{n}m_{kj}\boldsymbol{a}_k,\qquad\text{すなわち}\qquad(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)J$$

を満たす．このとき，対称双線形形式 b の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する表現行列 B と $\{\tilde{\boldsymbol{a}}_j\}$ に関する表現行列 $\widetilde{B}$ は，関係式 $\widetilde{B}={}^tJBJ$ を満たすことを確かめなさい．

■第一基本形式． 曲面の助変数表示 $p(u,v)$ を 2 変数関数の組 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と考え，全微分

$$dp=(dx,dy,dz)=p_u\,du+p_v\,dv$$

を考える．とくに問 2.9 から dp はパラメータのとり方によらない[*4].

定義 2.15. 次の「式」を曲面 $p(u,v)$ の**第一基本形式**という：

$$ds^2:=dp\cdot dp=(p_u\,du+p_v\,dv)\cdot(p_u\,du+p_v\,dv)=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=(du,dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$$

ただし $E=p_u\cdot p_u$, $F=p_u\cdot p_v$, $G=p_v\cdot p_v$, は第一基本量で，$\widehat{I}:=\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)$ （これを**第一基本行列**とよぶ）.

[*4] これまでは P を固定して考えていたが，以後，$\omega:=\alpha\,du+\beta\,dv$ の α, β は (u,v) の関数と考える．このとき ω を**曲面上の 1 次微分形式**とよぶ.

問 2.16. 点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ を一つ固定し，第一基本量などはその (u_0, v_0) での値を考えるとする．このとき，

- 第一基本行列 $\widehat{I}$ は，接平面 $V_{\mathrm{P}} \subset \mathbb{R}^3$ の内積（$\mathbb{R}^3$ の標準内積 "$\cdot$" の制限）の，V_{P} の基底 $\{p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)\}$ に関する表現行列である．
- 問 2.3 のパラメータ変換によるパラメータ表示 $p(\xi, \eta)$ の第一基本行列を $\widetilde{\widehat{I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I}} = {}^tJ\,\widehat{I}\,J$ である．ただし J は (2.2) のヤコビ行列である．
- 接平面 V_{P} 上のベクトル $\boldsymbol{v} = \alpha\, p_u + \beta\, p_v$, $\boldsymbol{w} = \alpha'\, p_u + \beta'\, p_v$ に対して

$$|\boldsymbol{v}|^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = (\alpha, \beta)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \alpha\alpha' E + (\alpha\beta' + \beta\alpha')F + \beta\beta' G = (\alpha, \beta)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}.$$

問 2.17. パラメータ表示された曲面 $p(u, v)$ に対して，$\hat{p}(u, v) = Rp(u, v) + \boldsymbol{b}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$) とするとき，$p$ の第一基本量と $\hat{p}$ の第一基本量が一致することを示しなさい．

■第二基本形式． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u, v)$ の単位法線ベクトル $\nu(u, v)$ をとる．このとき

$$\begin{aligned} I\!I := -dp\cdot d\nu &= -(p_u\cdot\nu_u)\,du^2 - (p_u\cdot\nu_v + p_v\cdot\nu_u)\,du\,dv - (p_v\cdot\nu_v)\,dv^2 \\ &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (du, dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} \qquad \left(\widehat{I\!I} := \begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

を**第二基本形式**，L, M, N を**第二基本量**，$\widehat{I\!I}$ を**第二基本行列**という．

問 2.18. 上の状況で $-p_u\cdot\nu_u = p_{uu}\cdot\nu$, $-p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u = p_{uv}\cdot\nu$, $-p_v\cdot\nu_v = p_{vv}\cdot\nu$ となることを示しなさい．とくに，$M = -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u$.

問 2.19. 曲面 $p(u, v)$, $\tilde{p}(\xi, \eta)$ が問 2.3 のようなパラメータ変換で移り合うとき，$\tilde{\nu}(\xi, \eta) = \nu(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトルを与える．この単位法線ベクトルに対して $\tilde{p}$ の第二基本行列を $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tJ\,\widehat{I\!I}\,J$ が成り立つことを確かめなさい．ただし J は (2.2) のヤコビ行列である．

問 2.20. 曲面 $p(u, v)$ の単位法線ベクトルを $\nu(u, v)$ とする．直交行列 R と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\hat{p}(u, v) := Rp(u, v) + \boldsymbol{a}$, $(\hat{\nu} := R\nu)$ とおくと $\hat{\nu}$ は $\hat{p}$ の単位法線ベクトルで，$\hat{\nu}$ に対する $\hat{p}$ の第二基本形式は p の第二基本形式と一致することを示しなさい．

問題

2-1 曲面 $p(u, v)$ のパラメータ (u, v) が等温座標系であるとは，第一基本量が $E = G$, $F = 0$ を満たすことである．このとき，さらにこのパラメータ表示からパラメータ変換で得られる同じ曲面のパラメータ表示 $\tilde{p}(\xi, \eta)$ において (ξ, η) が等温座標系であるためには，パラメータ変換がどのような条件を満たさなければならないか．

2-2 パラメータ表示された曲面 $p(u, v) = (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v - \tanh v)$ $(-\pi < u < \pi, v > 0)$ に対して，uv 平面上の曲線 $\{(u, v)\,|\,u^2 + \cosh^2 v = 4, v > 0\}$ に対応する曲面上の曲線と，平面上の曲線 $\gamma(t) = (1, t)$ に対応する曲面上の曲線 $\hat{\gamma}(t)$ のなす角を求めなさい．