2017 年 12 月 14 日 (2017 年 12 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 3

前回までの訂正

- 前回の問題解説（擬球面上の曲線の長さ）で，$\int_\delta^M \tanh v\,dv = (\log\cosh v]_\delta^M$ と書いたようです．最初の “(” は “[” です．
- 前回の問題解説（擬球面の面積）で面積を求める範囲を $[-\pi+\varepsilon, \pi+\varepsilon]\times[\delta, M]$ と誤記したようです：$[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]\times[\delta, M]$.
- 講義資料 1 では J をヤコビ行列式，講義資料 2 ではヤコビ行列の意味で使っているとのご指摘がありました．ごもっとも．講義資料を訂正はしませんが，今回以降，J はヤコビ行列の意味で使います．
- 講義資料 2, 1 ページ，7 行目：3 ページ (1.3) 式 ⇒ 4 ページ (1.3) 式.
- 講義資料 2, 1 ページ，8 行目：問題 I-1 (2) ⇒ 問題 I-1 (3)
- 講義資料 2, 3 ページ，式 (2.2)：ふたつ目の $\neq 0$ を削除.
- 講義資料 2, 3 ページ，9 行目：$\tilde p$ を ⇒ $\tilde p$ は
- 講義資料 2, 4 ページ，7 行目：曲面 $p(u,v)$ が曲面 $\tilde p(\xi,\eta)$ から ⇒ 曲面 $\tilde p(\xi,\eta)$ が曲面 $p(u,v)$ から
- 講義資料 2, 4 ページ, 下から 8 行目：式 (??) ⇒ 問 2.3
- 講義資料 2, 5 ページ, 3 行目：$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in W$ ⇒ $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in V$
- 講義資料 2, 6 ページ，問 2.20：第二基本型式 ⇒ 第二基本形式（2 箇所）

授業に関する御意見

- 今回は文字が多くてもじもじしちゃう式が多かった． **山田のコメント：** こまったね.
- クラインの壺の中に水を入れたいです． **山田のコメント：** どうなるでしょうね.
- 英語の筆記体が読めるようになるよう努力します． **山田のコメント：** どうやったらいいんでしょうね.
- 第一基本量を使いこなせるようにしたいです． **山田のコメント：** そうですか.
- u と v の文字が似てて，書いてて自分でも分からなくなりました.
  山田のコメント： 自分用の「手書き」フォントセットを用意するとよいですね.
- 「パラメータ変換がどのような条件を満たさなければならないか」がどこまで細かく（また逆に粗く）求めればよいか見当を付けづらかった． **山田のコメント：** 状況がよくわからないのでもうすこし具体的に書いてください.
- マイクを使って話していただき，ありがとうございます． **山田のコメント：** どういたしまして.
- 授業で ξ を大きく書いて下さったので，いままでよりきれいに書けるようになりました． **山田のコメント：** なるほど.
- ξ **山田のコメント：** で?
- 分からないところがあっても質問できるので安心して勉強できます.
  山田のコメント： たいていの科目はそうだと思いますが，ご利用ください.
- 質問に番号を振って下さったことで，行数を数える手間が減り助かりました． **山田のコメント：** こうした方がよいですね.
- 先生の新著が読めるように努力したいです． **山田のコメント：** 間違いを見つけたら教えて下さい.
- ㋱は面倒くさいの省（原文ママ：略のことか？）$\boxed{\text{め}}$は博多の明太せんべいですね． **山田のコメント：** そうだったんですね.
- 特になし（2 件） **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 領域 $\widetilde D\subset\mathbb{R}^2$ から領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ への写像 $\varphi\colon \widetilde D\to D : (\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ が微分同相であるとは，φ が全単射で φ, φ^{-1} がともに C^∞ 級であるということでしたが，φ, φ^{-1} が C^2 級など C^∞ 級でなくても前回の講義までの内容と同様のことがいえると思うのですが，どうですか.

お答え： （暗黙的かもしれませんが）パラメータ表示 $p(u,v)$ の各成分は (u,v) の滑らかな（C^∞-級）関数としています．パラメータ変換をほどこしてもその性質が保たれるようにするために，C^∞-級であることを要求しています.

質問 2： 第一基本形式を考えるとき，$(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ が微分同相である必要はありますか（全微分可能くらいで問題ないような気もしますが...） **お答え：** 第一基本形式はパラメータ変換から定義してはいないのでは? (1) パラメータ表示が C^∞ であることを保つために写像が C^∞-級であることが必要です．(2) 逆写像もまたパラメータ変換になる（すなわちパラメータ変換で移り合うことが同値関係となる）ために，逆写像が C^∞ であることが必要.

質問 3： いままで学習した曲面の第一基本量は曲線の弧長パラメータに相当するものと考えられますか.

お答え： いいえ．パラメータにはなっていません．曲線 $\gamma(t)$ の第一基本量は $|\dot\gamma(t)|^2$ になるはず.

質問 4： $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ と書くと，ds は正負の違いが考えられるのでしょうか? それとも正の方を ds と固定して考えるのでしょうか. **お答え：**曲線の長さの式を考えると「正」と思うのがよいのでしょうが,「形式的に ds^2 と書く」と考えると，ds^2 をまとめて一語と考え「何かの二乗」とみなさないのが自然だと思います.

質問 5： 問題 2-2 では，uv 上の曲線 $\beta(t) = \{(u,v)\,|\,u^2 + \cosh^2 v = 4, v > 0\}$ （原文ママ：右辺に t が含まれないので，$\beta(t)$ と書くのはちょっと変）と $\gamma(t) = (1,t)$ との交点を計算するとき，“$1^2 + \cosh^2 t = 4$” の方を使っていいですか．$\beta(t) = (2\cos t, \cosh^2(2\sin t))$ の型にして計算しますか? **お答え：**どちらでもよいのでは?

質問 6： 問題 2-2 は $\{(u,v)|u^2 + \cosh^2 v = 4, v > 0\}$ をパラメータ表示して（$\gamma_2(t)$ とおく）教科書の (7.18) 式から求めようと思ったのですが，ある t で $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ になるようなパラメータ表示にしなければならないと考えたのですが，そのようなパラメータ表示を求めることができませんでした．どのようにしてそれを求めればよいのでしょうか. **お答え：**$(\sqrt{4-\cosh^2 t}, t)$.

質問 7： 「等温座標系」という名前の由来は何ですか? 熱力学と関係があるのでしょうか?

質問 8： $E = G$, $F = 0$ となる性質をもつ座標系を等温座標系という名前が付けられたのは何故でしょうか？（温度の「温」が付いているのですが，何かの物理的な温度に関係しているのではないかと思うので...）

お答え： 平面上を伝わる熱について，温度分布（等温線）と熱流が直交することによるものだと思っています.

質問 9： 教科書 p77 の (7.18) で E, F, G の中は $t = t_0$ の値を代入して計算しますか？

お答え： $(u_1(t_0), v_1(t_0))$ ($(u_2(t_0), v_2(t_0))$ と一致する）を代入します.

質問 10： 講義内の板書で，極限の記号として「$\varepsilon \downarrow 0$」が用いられていましたが，これは「$\varepsilon \to 0$」と何か違うのでしょうか. **お答え：**右極限の意味で使っています．“$\varepsilon \to +0$”, “$\varepsilon \to 0+$”, “$\varepsilon \searrow 0$” などとも書きます.

質問 11： 講義資料 2, 6 頁に関して，第二基本形式 $I\!I$ はギリシャ文字 Π (π の大文字）ではなく，ラテン文字 I (i の大文字）を二つ並べたものですよね．この由来は第二基本形式の「第二」を表すローマ数字 $I\!I$ ですか.

お答え： そうです.

質問 12： パラメータをとるときになぜ ξ, η をよく用いるのでしょうか．アルファベット順で連続するわけでもないはずなのでどうしてなのか気になりました.

お答え： ローマ文字 x, y, z の対応物として（たぶん発音から）ξ, η, ζ が使われることが多いので.

質問 13： 例えば，正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本量 E, F, G を用いて U に含まれる有界閉集合 $\overline{V}$ に対して $\overline{V}$ に対応する曲面の面積を $S =$(省略) と表すことができました．それに対して第二基本量 L, M, N を p の単位法線ベクトル $\nu(u,v)$ に対し（略）と定めることに何か意味があるのでしょうか.

お答え： ということを今回説明するのですが，どういう答えを期待しているのでしょうか.

質問 14： 教科書命題 7.4 の証明について（必要性の証明）D 内の任意の曲線 $\gamma(t)$ の長さと一致するならば $E = G = 1$, $F = 0$ であることを示すとき，$(u_0 + t\cos\alpha, v_0 + t\sin\alpha)$ $(0 \leqq t \leqq c)$ を考えるのですが，なぜこの曲線 $(u_0 + t\cos\alpha, v_0 + t\sin\alpha)$ を考えるのか分かりません．任意の曲線を $(u_0 + t\cos\alpha, v_0 + t\sin\alpha)$ としてよいのですか. **お答え：**講義資料 2，質問 5 とその回答を読んだ上で，わからなかったら再度質問して下さい.

質問 15： 今回の講義でパラメーターのとり方によらないものとして第一基本形式を扱いましたが，他に何があるのでしょうか. **お答え：**講義資料をみると（講義で明確に説明していないが）面積や第二基本形式がありますね.

質問 16： 第一基本量や第一基本形式はどのようなイミを持つのでしょうか（第二も）

お答え： 第二基本形式は次の回に送った．第一基本形式は接平面の内積，ということを講義で説明しました.

質問 17： uv 平面上で求めたなす角から p への曲面上のなす角を考えることはできますか?

お答え： いいえ．今回説明した「第一基本形式が「内積」である」ということからすぐわかると思います.

質問 18： 滑らかな曲面は一般的に二次形式で表されますか.

お答え： 曲面を「二次形式で表す」とはどういうことでしょう（どういうことを想像しているでしょう).

質問 19： メビウスの帯やクラインの壺において，単位法線ベクトル場を考えると，メビウスの帯やクラインの壺上の一つの点において（表と裏がないことから）真逆の二つのベクトルが存在してしまうと思います．そうなってしまっても，そのベクトル場を単位法線ベクトル場と認めてもよいですか？

お答え： その場合でも十分小さい領域に限れば，どちらかの単位法線ベクトル場を選ぶことができます．一般に，単位法線ベクトル場が曲面全体で well-defined であるとき「曲面は向き付け可能」といいます．その意味で，クラインの壺は向き付け不可能.

質問 20： 特になし. **お答え：**そう？

3　主曲率・ガウス曲率・平均曲率

■単位法線ベクトル（再掲）

定義 3.1. 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，

- $(u,v) \in U$ における（または $\mathrm{P} = p(u,v)$ における）S の**単位法線ベクトル**とは，P における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである．
- なめらかな写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ が，パラメータ表示された曲面 p の**単位法線ベクトル場**であるとは，各 (u,v) で $\nu(u,v)$ が p の (u,v) における単位法線ベクトルを与えていることである．

問 3.2. (1) 曲面の助変数表示 $p(u,v)$ に対して $\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ は単位法線ベクトル場である．
(2) $\tilde{p}$ を p からパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で得られる曲面とするとき，次を示しなさい：

$$\frac{\tilde{p}_\xi\times\tilde{p}_\eta}{|\tilde{p}_\xi\times\tilde{p}_\eta|} = \varepsilon\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|} \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta\end{pmatrix}$$

(3) $\hat{p}(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{q}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$) とおくとき，次を示しなさい：

$$R\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|} = \varepsilon\left(\frac{\hat{p}_u\times\hat{p}_v}{|\hat{p}_u\times\hat{p}_v|}\right) \qquad \varepsilon = \det R.$$

■第二基本形式（再掲）. 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル $\nu(u,v)$ をとるとき，

$$\begin{aligned} I\!I &:= -dp\cdot d\nu = -(p_u\cdot\nu_u)\,du^2 - (p_u\cdot\nu_v + p_v\cdot\nu_u)\,du\,dv - (p_v\cdot\nu_v)\,dv^2 \\ &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (du,dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix} du \\ dv\end{pmatrix} \qquad \left(\widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

を**第二基本形式**，L, M, N を**第二基本量**，$\widehat{I\!I}$ を**第二基本行列**という．

問 3.3. 上の状況で $-p_u\cdot\nu_u = p_{uu}\cdot\nu$, $-p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u = p_{uv}\cdot\nu$, $-p_v\cdot\nu_v = p_{vv}\cdot\nu$ となることを示しなさい．とくに，$M = -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u$.

問 3.4. 曲面 $p(u,v)$, $\tilde{p}(\xi,\eta)$ がパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で移り合うとき，$\tilde{\nu}(\xi,\eta) = \nu(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトルを与える．この単位法線ベクトルに対して $\tilde{p}$ の第二基本行列を $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tJ\,\widehat{I\!I}\,J$ が成り立つことを確かめなさい．ただし J はパラメータ変換のヤコビ行列である．

問 3.5. 曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu(u,v)$ とする．直交行列 R と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\hat{p}(u,v) := Rp(u,v) + \boldsymbol{a}$, $\hat{\nu} := R\nu$ とおくと $\hat{\nu}$ は $\hat{p}$ の単位法線ベクトルで，$\hat{\nu}$ に対する $\hat{p}$ の第二基本形式は p の第二基本形式と一致することを示しなさい．

■ワインガルテン行列 曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル ν をとり，第一・第二基本行列を $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ とする．

問 3.6. (1) $\widehat{I}$ は正則であることを示しなさい．(2) $\widehat{I}$ の固有値は正の実数であることを示しなさい．

定義 3.7. $A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I}$ を**ワインガルテン行列**という．

2017 年 12 月 14 日 (2017 年 12 月 21 日訂正)

定理 3.8 (ワインガルテンの公式，テキスト 85 ページ，命題 8.5[*1])**.** $(\nu_u,\nu_v)=-(p_u,p_v)A$.

証明. 単位法線ベクトル ν は単位ベクトルだから，$\nu\cdot\nu=1$ なので $\nu\cdot\nu_u=\nu\cdot\nu_v=0$. したがって，$\mathcal{F}:=(p_u,p_v,\nu)$, $\mathcal{G}:=(\nu_u,\nu_v,\nu)$ をそれぞれ 3 次の正方行列と見なすと

$$
{}^t\mathcal{F}\mathcal{G}=\begin{pmatrix} p_u\cdot\nu_u & p_u\cdot\nu_v & p_u\cdot\nu \\ p_v\cdot\nu_u & p_v\cdot\nu_v & p_u\cdot\nu \\ \nu\cdot\nu_u & \nu\cdot\nu_v & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -L & -M & 0 \\ -M & -N & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\widehat{I\!I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix},\qquad {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}=\begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}&={}^t\mathcal{F}^{-1}\begin{pmatrix} -\widehat{I\!I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1})\,{}^t\mathcal{F}^{-1}\begin{pmatrix} -\widehat{I\!I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=\mathcal{F}({}^t\mathcal{F}\mathcal{F})^{-1}\begin{pmatrix} -\widehat{I\!I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}\\
&=\mathcal{F}\begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\widehat{I\!I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=\mathcal{F}\begin{pmatrix} -\widehat{I}^{\,-1}\widehat{I\!I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=\mathcal{F}\begin{pmatrix} -A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

■ガウス曲率・平均曲率.

問 3.9. 曲面 $p(u,v)$ からパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で得られる曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ のワインガルテン行列 $\widetilde{A}$ は $p(u,v)$ のワインガルテン行列 A とパラメータ変換のヤコビ行列を用いて $\widetilde{A}=J^{-1}AJ$ と表されることを確かめなさい．さらに A の固有値はパラメータのとり方によらないことを示しなさい．

問 3.10. 問 3.5 の状況で $\hat{p}$ のワインガルテン行列は p のワインガルテン行列と一致することを示しなさい．

定理 3.11 (テキスト 86 ページ，定理 8.7; 90 ページ，問題 1)**.** ワインガルテン行列の固有値は実数である．

定義 3.12. ワインガルテン行列 A の固有値 κ_1, κ_2 を曲面の**主曲率**，$K:=\kappa_1\kappa_2=\det A$, $H:=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}A$ をそれぞれ**ガウス曲率**，**平均曲率**という．

問 3.13. (1) 平面の主曲率は 2 つとも 0 で，ガウス曲率，平均曲率はともに 0 になることを示しなさい．

(2) 半径 r $(r>0)$ の球面の単位法線ベクトルを外向きにとると，ガウス曲率は $1/r^2$，平均曲率は $1/r$.

(3) 正の定数 r に対して $p(u,v)=(r\cos u, r\sin u, v)$ は半径 r の円柱面を与える．この曲面の主曲率，ガウス曲率，平均曲率はそれぞれ $\pm1/r$ と 0，0，$\pm1/(2r)$ である．

問題

3-1 曲面 $p(u,v)=(\operatorname{sech}v\cos u,\operatorname{sech}v\sin u, v-\tanh v)$ $(|u|<\pi, v>0)$ の主曲率，ガウス曲率，平均曲率をそれぞれ求めなさい．

3-2 パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν とするとき，$\widehat{I\!I\!I}:=\begin{pmatrix}\nu_u\cdot\nu_u & \nu_u\cdot\nu_v \\ \nu_v\cdot\nu_u & \nu_v\cdot\nu_v\end{pmatrix}$ を第三基本行列，その各成分を第三基本量という．次を示しなさい：

(1) $\det\widehat{I\!I\!I}=K^2(EG-F^2)$. ただし K はガウス曲率，E, F, G は第一基本量である．

(2) $\widehat{I\!I\!I}-2H\,\widehat{I\!I}+K\,\widehat{I}=O$. ただし H は平均曲率，$\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ はそれぞれ第一基本行列，第二基本行列である．

[*1] テキストの証明は誤り．正誤表を参照してください．