2017 年 12 月 21 日 (2017 年 12 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 4

前回までの訂正

- テキスト 79 ページ，問 1 の (3) ：$AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow AP = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$
`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-2-errata-ver201-20161014.pdf` 参照
- テキスト 81 ページ，4 行目：（節末の問題 **4**）⇒ （§6 の問題 **4**）
- 問題 II-2 の解説：$p_v = \tanh v(-\operatorname{sech} v \cos u, -\operatorname{sech} v \sin u, \tanh v)$ （第 2 成分の v が抜けていた）
- 講義資料 2, 2 ページ，質問 17 の回答：付録 B-9 ⇒ 付録 B-8 （前回ご指摘頂いていたのが漏れていました）.
- 講義資料 2, 6 ページ，14 行目；講義資料 3, 3 ページ，16 行目：**行列という** ⇒ **行列**という（「と」の太字解除）
- 講義資料 2, 6 ページ，21 行目；講義資料 3, 3 ページ，23 行目：$\hat{p}$ の第二基本形式 $\hat{I}I$ は ⇒ $\hat{p}$ の第二基本形式は
- 講義資料 3, 1 ページ，前回までの訂正の 6 つ目：式 (2.3) ⇒ 式 (2.2)
- 講義資料 3, 2 ページ，質問 4 冒頭：$ds^2 + \dots \Rightarrow ds^2 =$
- 講義資料 3, 2 ページ，質問 12 回答：こことが多いので ⇒ ことが多いので
- 講義資料 3, 4 ページ，1 行目：命題 3.5 ⇒ 命題 8.5
- 講義資料 3, 4 ページ，9 行目：得られる曲面 ⇒ で得られる曲面
- 講義資料 3, 4 ページ，9 行目：ワインガルテン行列を $\widetilde{A}$ は ⇒ ワインガルテン行列 $\widetilde{A}$ は
- 講義資料 3, 4 ページ，12 行目：問 3.4 の状況 ⇒ 問 3.5 の状況

授業に関する御意見

- ν はうまく書けないです．いつも v に書き間違えます． **山田のコメント：** まずいのでは?
- 主曲率を求めるのは機械的な作業ですが，それでもそれなりの手間がかかることを問題 3-1 を解いて実感しました． **山田のコメント：** 原理的にできることと，答えまで到達することって違いますよね．
- 擬球のガウス曲率が -1 になることを知っていて助かった．．．．（問題 3-1 を解いていて，ガウス曲率が -1 にならず計算ミスに気づけた）． **山田のコメント：** 計算ミスに気づくのは大事ですね．
- 第 2 基本形式の導入が曲面の “曲がり方” を表すという説明がとてつもなくわかりやすかったです． **山田のコメント：** そう?
- 4Q のテストをうける教室は，3Q と同様に別の教室でやる予定ですか? **山田のコメント：** 講義室でやる予定．
- 途中でマイクが切れて残念でした． **山田のコメント：** そうですね．今週はどうでしょう．
- マイク無しでも後ろの方まで聞こえました． **山田のコメント：** すこし頑張りました．PA があった方がこちらは楽なのです．
- 質問に関するコメントが読めません． **山田のコメント：** 紙に書いたコメントは山田用のメモ．講義資料のコメントが正式．
- 「裏」（注：裏の鏡文字）とかくのは難しい． **山田のコメント：** 私もです．練習しました．
- 今回は特にないです．/特になし．/特に無し **山田のコメント：** me, too (なんだろうか?)

質問と回答

質問 1： $\nu(u,v) = \pm\frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ の $+, -$ の選び方によって主曲率やガウス曲率，平均曲率の値が変わると思うのですが，この選び方は任意でよいのでしょうか．

お答え： したがって第二基本形式は「単位法線ベクトルを一つ固定したときの」第二基本形式という意味しかないわけです．もし，単位法線ベクトルを逆向きにとると，第二基本形式の符号がかわり，これに伴ってワインガルテン行列の符号もかわり，主曲率にもマイナスが付きます．このことから，主曲率，平均曲率の「符号」はあまり意味がないのですが，ガウス曲率は単位法線ベクトルの選び方によらないことがわかります．

質問 2： プリント p3 で第二基本形式のところで $\nu(u,v)$ は曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルですが，授業では $\nu(u,v)$ を単位法線ベクトル場と書いていました．どう区別するのでしょうか．

お答え： 本来「単位法線ベクトル場」と書くべきと思いますが，省略して「単位法線ベクトル」ということがあります．また，「曲面上の点 P における単位法線ベクトル」というときは，「場」はつけません．

質問 3： 問 3.11（原文ママ：3.13 だと思う） (3) について（途中省略）主曲率は $-1/r$ と 0 になるのですが，プリント

の答えは $\pm 1/r$ と 0 となっていました．教科書では [1] の式（山田注：$\nu = p_u \times p_v / |p_u \times p_v|$）によって単位法線ベクトルの向きを定めて主曲率を定義していると解釈していたのですが，どちらの答えが正しいですか?

お答え： おっしゃる通り [1] 式で単位法線ベクトル場を定めれば，主曲率がきまります．教科書では曖昧な立場をとっていますが，$\pm$ は単位法線ベクトル場の取り方による符号の違いです．どちらでも正しいと思います．

質問 4： 第一基本形式は ds^2 と書き形式的にですが「長さの 2 乗」を表していましたが，第二基本形式にはそのような意味はあるのでしょうか． **お答え：**「そのような」が何を指すかわかりませんが，第二基本形式は「正」とは限らない，すなわち一般には $L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v})^2$ の平方根がとれません．

質問 5： 第二基本量に “$-$” を付けなくても A（山田注：A は符号を変えますね），K, H は変わらないのになぜ付けるのですか．/ 第一，第三基本量は “$-$” がつかないのに，何故第二基本量だけ “$-$” が付くのでしょうか?

お答え： $L = p_{uu} \cdot \nu$ という式が成り立つ，すなわち 2 階微分の法線成分が第二基本量となるようにしたかったから．マイナスを付けない流儀もある，ということを講義で述べた．なお，$p_{uu} \cdot \nu$ を定義とせず，$L := -p_u \cdot \nu_u$ としたのは，第二基本形式がパラメータによらないことが直接確認できる形だから．

質問 6： 平面曲線には曲率円が考えられましたが，曲面でも Gauss 曲率は平均曲率から曲率球は考えられるでしょうか． **お答え：**球面では十分に近似できません．2 次曲面を用います．深入りはしません．

質問 7： 教科書 86 ページ，図 8.1 について，楕円点と双曲点の付近の曲面の振る舞いは分かりましたが，放物点ではどの様になるのでしょうか．予想では下図（略：円柱の一部の接平面が書いてある）と思いますが，実際はどうなのでしょうか． **お答え：**さまざまな場合があり，特定しがたいです．グラフ $z = x^4 \pm y^4$, $z = x^3 + y^2$ は，原点が放物点ですが，どんな形をしているでしょう．

質問 8： 第二基本形式は曲面の “まがり方” を表すと講義でおっしゃっていましたが，主曲率，平均曲率，ガウス曲率は曲面のどういう性質を表すのでしょうか． **お答え：**今回少し説明します．

質問 9： ガウス曲率と平均曲率の幾何学的な意味はなんですか? ガウス曲率が 0 であるとき，この曲面が「平坦な平面」と考えられますか． **お答え：**前半：今回少しだけコメントする．後半：教科書付録 B-5 を見よ．

質問 10： ガウス曲率が常に 0 となる曲面は，十分大きな理想的な紙（平面）を曲げるだけで必ず作ることができるのですか．もし作ることができるならそれはなぜですか． **お答え：**教科書の付録 B-5 や補題 15.2 にヒントがある．

質問 11： 第二基本形式が曲面のまがり方を表すならば，第三基本形式は曲面の何を表しますか．

お答え： ν の第一基本形式．

質問 12： 講義では第一基本形式と第二基本形式を用いて話をすすめていますが，第三基本形式を中心に話をすすめない理由はありますか?/ 第三基本形式を調べても記述が少ないのですが，あまり使われないのでしょうか．

お答え： 問題 III-2 の結果から，第一基本形式と第二基本形式で間に合いますが，特殊な状況で使う場合もあります．

質問 13： 超平面上でも正方行列の形で第 1 基本行列，第 2 基本行列が定義できると思うですが，その場合も ds^2 と第 2 基本行列が決まれば超曲面を定めることができますか?

お答え： 最初の「超平面」は超曲面の typo ですよね．はい，超曲面の基本定理は成立します．

質問 14： メビウスの輪の話を聞いて思ったのですが，球面上を歩く人がいて（人は球面を貫通しない）この人はこのままでは球面内に入れません．球面にいくら変形を施しても内側に歩いていくことはできないでしょうか．

お答え： 「変形」が何をさしているかによって微妙ですが，球面は向き付け可能で，その性質は変形によって保存されるので，中には入れません．「球面の裏返し」という話題がありますが，それとは違う問題だと思います．

質問 15： 単位法線ベクトル場に ν を用いるのはアルファベットとして n と ν が対応しているからでしょうか．

お答え： と言いませんでしたっけ．

質問 16： Rem は何の意味ですか **お答え：**Remark

質問 17： 授業の最後にかいた $ct(0, 0)$（山田注：判読できていません）というのは何ですか．

お答え： 何でしょう．文脈をはっきりさせてください．

質問 18： よく「宗教上の理由」という言葉を使っていますが（今回の講義ではなかったけど）先生は宗教をどう考えていますか? **お答え：**何も考えていません．

質問 19： 3-2 途中で $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$ を導くのに $A = I^{-1}II$ (原文ママ：ハットが抜けていませんか?) より，$II = IA = \binom{p_u}{p_v}(p_u, p_v)A$ （原文ママ：最初の p_u, p_v は転置ではありませんか?）また，$II = -\binom{p_u}{p_v}(\nu_u, \nu_v) = \binom{p_u}{p_v}(p_u, p_v)A$ から $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$ をもってくることは強引ですか?

お答え： 強引というよりでたらめ．$\binom{p_u}{p_v}$ は（転置記号をつけるべきですが）2 行 3 列の行列ですが，それで「割り算」をする，ってどういうことですか?

質問 20： 特になし． **お答え：**本当?

4 主方向・漸近方向

■接成分，法成分． パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．

$$\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \qquad (V_{\mathrm{P}} \text{ は } \mathrm{P}=p(u_0,v_0) \text{ における曲面の接平面}, \ \nu_{\mathrm{P}}=\nu(u_0,v_0)) \tag{4.1}$$

と直和分解できる．ただし $\nu(u,v)$ は p の単位法線ベクトル．したがって任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \qquad ([\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\in V_{\mathrm{P}}, [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}}\in\mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}) \tag{4.2}$$

と一通りに分解することができる．

問 4.1. 式 (4.2) において $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}}=(\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$, $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$ であることを示しなさい．

■曲面上の曲線． パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ と，uv-平面上の曲線 $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ に対して，空間曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ は曲面上の曲線を与える．

問 4.2. 次を確かめなさい．

- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の $\mathrm{P}:=\hat\gamma(t_0)$ における速度ベクトルは次で与えられる．
$$\dot{\hat\gamma}(t_0)=\dot u(t_0)p_u(u_0,v_0)+\dot v(t_0)p_v(u_0,v_0) \qquad (u_0,v_0)=\bigl(u(t_0),v(t_0)\bigr).$$
- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ のパラメータ s が弧長であるための必要十分条件は
$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=1$$
である．ただし E, F, G は p の第一基本量で，$(u,v)=\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

■法曲率． 曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．$\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ を，$\mathrm{P}=\hat\gamma(s_0)$ となる曲面上の曲線で s はその弧長パラメータとする．このとき，

$$\gamma''(s_0)=\boldsymbol{\kappa}_g+\boldsymbol{\kappa}_n, \qquad \boldsymbol{\kappa}_g:=[\gamma''(s_0)]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\kappa}_n:=[\gamma''(s_0)]^{\mathrm{N}}=\kappa_n\nu_{\mathrm{P}}, \qquad \kappa_n=\gamma''(s_0)\cdot\nu_{\mathrm{P}}$$

とおき，$\boldsymbol{\kappa}_g$，$\boldsymbol{\kappa}_n$，κ_n をそれぞれ曲線 $\hat\gamma$ の P における**測地的曲率ベクトル**，**法曲率ベクトル**，**法曲率** という．

問 4.3. 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ の $\mathrm{P}=\hat\gamma(s_0)$ における法曲率は

$$\kappa_n=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \tag{4.3}$$

である．ただし L, M, N は p の第二基本量の $(u,v)=\bigl(u(s_0),v(s_0)\bigr)$ での値とする．また，弧長とは限らないパラメータで表された曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(\mathrm{P}=\gamma(t_0))$ の P における法曲率は次で与えられる：

$$\kappa_n=\frac{L(\dot u)^2+2M\dot u\dot v+N(\dot v)^2}{E(\dot u)^2+2F\dot u\dot v+G(\dot v)^2}. \tag{4.4}$$

2017 年 12 月 21 日 (2017 年 12 月 21 日訂正)

式 (4.4) から，点 P における曲線の法曲率は $(\dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0))$ の方向のみ，すなわち $\hat{\gamma}$ の接線の方向のみに依存する．したがって，次の $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は well-defined である：

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \text{点 P で速度 } \boldsymbol{v} \text{ をもつ曲面上の曲線の P における法曲率} \qquad (\boldsymbol{v} \in V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\}). \tag{4.5}$$

命題 4.4 (テキスト 94 ページ，定理 9.1)**.** 曲面 p の $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における接ベクトル $\boldsymbol{v} \in V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，P を通り，ν_{P} と $\boldsymbol{v}$ に平行な平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ をとり，この平面と曲面の交線を，P における速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるような $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線 σ とみなす．このとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は σ の P における（平面曲線としての）曲率と一致する．ただし，$\{\boldsymbol{v}, \nu\}$ が $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の正の基底になるように $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の向きを定めておく．

問 4.5. 式 (4.5) の写像 $\kappa_n \colon V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{R}$ は，次を満たすことを確かめなさい：

$$\kappa_n(\tau\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v}) \qquad (\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \qquad \text{とくに} \quad \kappa_n(-\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v}). \tag{4.6}$$

命題 4.6 (テキスト 97 ページ，命題 9.3)**.** 法曲率 $\kappa_n \colon V_{\mathrm{P}} \to \mathbb{R}$ の最大値・最小値は P における主曲率である．

点 P における 2 つの主曲率が一致するとき，P を**臍点**（せいてん）という．点 P が臍点でないとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = \kappa_j$ $(j = 1, 2)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}_j \in V_{\mathrm{P}}$ の方向を，P における主曲率 κ_j に対応する**主方向**と呼ぶ．

命題 4.7 (テキスト 97 ページ)**.** 曲面 $p(u, v)$ の臍点でない点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における主曲率 κ_j に対応する主方向 $\boldsymbol{v}_j$ を $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_u(u_0, v_0) + \beta_j p_v(u_0, v_0)$ と表すと，${}^t(\alpha_j, \beta_j)$ は P におけるワインガルテン行列 A_{P} の，固有値 κ_j に対応する固有ベクトルである．

■漸近方向.

問 4.8. 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における曲面のガウス曲率が負であるとき，次を確かめなさい：

- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる方向 $\boldsymbol{v}$ がちょうど 2 つ存在する（**漸近方向**; テキスト 97 ページ，命題 9.8）.
- 曲面の接平面（点 P を通る平面と見なす）と曲面との共通部分は P の近くで P で交わる 2 つの曲線となる．これらの曲線の P における接ベクトルは漸近方向をあたえる（テキスト 99 ページ，定理 9.9）.
- 2 つの漸近方向は，主方向で 2 等分される（テキスト 101 ページ，命題 9.10）.

問題

4-1 $S = \{(x, y, z) \mid x^6 + y^6 + z^6 - 1 = 0\}$ は滑らかな曲面であることを示し，S 上の点 (a, b, c) におけるガウス曲率を (a, b, c) で表せ．（ヒント：$\mathrm{P} = (a, b, c) \in S$ が $c \neq 0$ を満たすならば P の近傍で S は $z = f(x, y)$ とグラフ表示される（陰関数定理）．f の形を具体的に求めなくても陰関数の微分公式から f の微分を求めることができるので曲率を計算することができる．$c = 0$ のところではどうすればよいか）

4-2 曲面 $p(u, v)$ 上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ の各点 $\hat{\gamma}(t)$ で $\dot{\hat{\gamma}}(t)$ が漸近方向であるとき，$\hat{\gamma}(t)$ を**漸近曲線**という．特にガウス曲率が負で，各 u 曲線，v 曲線が漸近曲線のとき，(u, v) を**漸近線座標**とよぶ.

(1) パラメータ (u, v) が漸近線座標であるための必要十分条件は, 第二基本量が $L = 0$, $N = 0$, $M \neq 0$ を満たすことである．これを示しなさい.

(2) 曲面 $p(u, v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$ $(v > 0)$ のパラメータを変更して漸近線座標で表示しなさい.