2018 年 1 月 11 日 (2018 年 1 月 18 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 5

お知らせ

- 次回，1 月 18 日に**定期試験の予告**を行います．皆様お誘い合わせの上，ご出席ください．

前回までの訂正

- 講義資料 4, 1 ページ，前回までの訂正の最初の項目の訂正前：右辺の行列には右から P がかかっています．
- 講義資料 4, 2 ページ，質問 5 の 2 行目：“=” ⇒ “−”
- 講義資料 4, 2 ページ，質問 13：思うですが ⇒ 思うのですが
- 講義資料 4, 2 ページ，質問 18 の 1 行目：どうっ考え ⇒ どう考え
- 講義資料 4, 2 ページ，質問 6：Gauss 曲率は ⇒ Gauss 曲率や
- 講義資料 4, 3 ページ，下から 7 行目：
  $\gamma''(s_0)=\boldsymbol{\kappa}_g+\boldsymbol{\kappa}_n$, $\boldsymbol{\kappa}_g:=[\gamma''(s_0)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\kappa}_n:=[\gamma''(s_0)]^{\mathrm{N}}=\kappa_n\nu_{\mathrm{P}}$, $\kappa_n=\gamma''(s_0)\cdot\nu_{\mathrm{P}}$
  $\Rightarrow$ $\hat\gamma''(s_0)=\boldsymbol{\kappa}_g+\boldsymbol{\kappa}_n$, $\boldsymbol{\kappa}_g:=[\hat\gamma''(s_0)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\kappa}_n:=[\hat\gamma''(s_0)]^{\mathrm{N}}=\kappa_n\nu_{\mathrm{P}}$, $\kappa_n=\hat\gamma''(s_0)\cdot\nu_{\mathrm{P}}$.
- 講義資料 4, 3 ページ，下から 2 行目：$\mathrm{P}=\gamma(t_0)\Rightarrow\mathrm{P}=\hat\gamma(t_0)$
- 講義資料 4, 4 ページ，12 行目：$\kappa_n(\boldsymbol{v})\Rightarrow\kappa_n(\boldsymbol{v}_j)$
- 講義資料 4, 4 ページ，下から 16 行目：97 ページ ⇒ 99 ページ；下から 14 行目：99 ページ ⇒ 100 ページ

授業に関する御意見

- あけましておめでとうございます．今年もよろしくお願いいたします． / 2018 年もよろしくお願いします．
  山田のコメント： こちらこそ．
- 4Q になって内容が難しくなってきたので冬休みの間にしっかりと復習したいと思います． **山田のコメント：** どうぞ
- どんどんむずかしくなってきました！ **山田のコメント：** そりゃそうだ．
- 問題の解答に時間を使ってくれたので分かりやすかったです． **山田のコメント：** ほんと?
- パラメータ変換が上手く行きません． **山田のコメント：** そうですか．
- 一見，デタラメに定義されたように思えた，平均曲率とガウス曲率が，しっかりと曲面の図形的な意味を表わしていることに驚きました． **山田のコメント：** ですよね．
- ○○曲率が多いので混同しないように気をつけます． **山田のコメント：** ええ
- 次回の授業が 2018 年とは，ときの経つのは早いですね．なんと平成 30 年の 30 は $30=1^2+2^2+3^2+4^2$ と表せ，2018 年の 2018 は $2018=7^2+8^2+9^2+\cdots+18^2$ と表せるらしいです． **山田のコメント：** へえ
- 臍点の「せい」が上手く書けません．テストでは平仮名になりそうです． **山田のコメント：** たぶん書かせません．
- なぜ日本語の質問文の最後に “?” がないですか．とても不思議に感じました． **山田のコメント：** たしかに付けませんね．

質問と回答

質問 1： 問題 4-1 において S は滑らかな曲面であることを示せとありますが，そもそも滑らかな曲面とはこの講義ではどのような定義ですか? 教科書見ても定義が書いてあるページがみつからず，板書のノートをみても $\{F(x,y,z)=0\}$ に対し $\operatorname{grad}(F_x,F_y,F_z)\neq 0$（原文ママ：$\operatorname{grad}F\neq\boldsymbol{0}$ か）ならなめらかな曲面としか書かれておらず，定義はみあたりませんでした．（以下略）

お答え： 第 1 回講義で口頭で説明した「各点 P の近傍で $z=f(x,y)$ のグラフと合同である」が滑らかな曲面の「定義」．「」をつけたのは，正則にパラメータ表示された曲面が自己交叉を持つ場合がこの「定義」に当てはめづらいことによる（ということを第 1 回に「もごもご」と言った）．問題 4-1 の場合は，陰関数表示なので $\operatorname{grad}F\neq\boldsymbol{0}$ なら自己交叉をもたない曲面となるので，最初のような定義でよいはず．

質問 2： なめらかな曲面の定義は局所的にグラフ $z=f(x,y)$ と合同ということでしたが，$x=f(y,z)$, $y=f(x,z)$ と合同であることもなめらかな曲面であることを表していると思うのですが，よろしいですか．

お答え： あとに挙げた 2 つの式で表される曲面はグラフ $z = f(x,y)$ と合同.

質問 3： なめらかの定義が科目で異なるのはなぜですか. **お答え：**「なめらかの定義」では意味がわからない.「なめらかな関数の定義」など，対象をはっきり記述せよ．その上で，文脈によって定義が違うことはしばしばある.

質問 4：「曲線と曲面」の中には滑めらか（原文ママ）な曲面の定義は明確にされてないのですね. **お答え：**そうです.

質問 5： 3-2 の解説で $\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}(\nu_u, \nu_v) = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}(p_u, p_v)B$ B をおいてから $B = -A$ を示していましたが， 最初から Weingarten's formula を用いればおく必要すらない気がしましたが，それじゃダメなのでしょうか.

お答え： 伝わっていない? ここは「ワインガルテン公式」の（講義資料と少し違った）証明を与えているので，ダメ.

質問 6： 第一基本行列，第二基本行列，第三基本行列について，その内の 2 つが決まれば残りも決まるというお話しであったかと思う．では何故第一基本行列と第二基本行列ばかりが注目されるのでしょうか（第三基本行列が載っている本は少ないとか)．第一基本行列と第二基本行列から得られる情報の方が豊かなのでしょうか.

お答え：「あったかと思う」の部分が違う．$\widehat{I\!I\!I} - 2H\,\widehat{I\!I} + K\,\widehat{I} = O$ なので，例えば $H = 0$ となる点では $\widehat{I\!I\!I}$, $\widehat{I}$ から $\widehat{I\!I}$ は決まらない．すなわち，一般には,「$\widehat{I\!I\!I}$ は $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ から決まる」としか言えない.

質問 7： $\mathbb{R}^3 = \vec{V}_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}$ （原文ママ：黒板には $\vec{V}_{\mathrm{P}}$ ではなく V_{P} と書いた）での $\mathbb{R}$ は方向性がありますか.

お答え： V_{P} は点 P において曲面に接するベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間．また，$\mathbb{R}_{\nu_{\mathrm{P}}} = \{t\nu_{\mathrm{P}} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$，すなわち ν_{P} が生成する $\mathbb{R}^3$ の 1 次元部分空間．$\mathbb{R}^3$ がこの 1 次元部分空間と V_{P} の直和となる，と言っている.

質問 8： 直和分解について $\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}$ とありますが，$\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \nu_{\mathrm{P}}$ と書いてはいけないのでしょうか．右辺の $\mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}$ がどのような空間を表わしているかわからなかったです.

お答え： 質問 7 の回答参照.「$\mathbb{R}^3$ の部分空間とベクトルの直和」という形は変じゃないですか.

質問 9： ガウス曲率，平均曲率の図形的意味を学びましたが，法曲率にはどのような意味があるのでしょうか.

お答え： 教科書の定理 9.1.

質問 10： テキスト 95 ページ，命題 9.2 の証明において $s = 0$ の点だけで議論が進んでいますが，なぜ任意の s について議論しなくても良いのですか. **お答え：**説明不足かもしれない．まず曲面上の点 P を固定して，そこでの法曲率を考えている．P を通る曲線 $\gamma(s)$ で $\mathrm{P} = \gamma(0)$ となるものをとっていると考えてください.

質問 11： 2 変数関数 $f(x,y)$ があたえられたときに $f_x = 0$, $f_y = 0$ となるような点 (x,y) に対しヘッシアンの符号を調べることで最大値，最小値の存在を判断するのですが，教科書の §9 の式 (9.7) の最大値，最小値の求め方はなぜそのようにするのかよく分からないので，その辺の議論について教えて下さい.

お答え： 関数 $\lambda(\alpha,\beta)$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義されたなめらかな関数で，$\lambda(t\alpha, t\beta) = \lambda(\alpha,\beta)$ $(t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ を満たすから，λ を $\alpha\beta$-平面の単位円周に制限した関数 λ' と λ の像は一致する．λ' はコンパクト集合 S^1 上の連続関数だから，最大値・最小値をとるので λ も最大値・最小値をとる．λ が (α,β) で最大（小）値をとるなら，その点で $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 0$．すると，その点で (9.8) が満たされる．このような (α,β) が存在するなら λ は A の固有値．したがって A の固有値は λ の最大値・最小値でなければならない.

質問 12： 局所的には平面と等長的とは，局所的にみれば等長変換で移り合うという意味でしょうか.

お答え：「ガウス曲率が恒等的に 0 である曲面は局所的に平面と等長的」という文脈? 曲面の各点の近傍と $\mathbb{R}^2$ の領域の間の微分同相写像で（曲線の）長さを保つものが存在する，ということ．$\mathbb{R}^3$ の中で合同とは限らない.

質問 13： 平均曲率 H のおはなしで，はりがねにはるセッケンの膜は $H = 0$ だと説明していましたが，二本以上のはりがねにはるセッケンの膜も $H = 0$ ですか? **お答え：**はい．この話は境界の連結性を仮定しません.

質問 14： 任意の閉曲線 C に対して「C を境界とする曲面の中で面積最小のものが必ず存在する」のですか.

お答え：「プラトー問題」で検索．最初に満足な形で存在を示したのは J. Douglas と T. Radó (1930)．この辺りは `http://www.jst.go.jp/crest/math/ja/suugakujuku/archive/text/3_Koiso_text.pdf` の小磯深幸氏の解説がわかりやすい.

質問 15： $\widehat{I}A^2 = \widehat{I}((\operatorname{tr} A)A - (\det A)I)$ になるのはなぜですか． 試験の時に証明なしにそのまま使っていいですか.

お答え： 2 次正方行列に対する Cayley-Hamilton の定理．そのことを明示して使うべき.

質問 16： 試験で単位法線ベクトル（場）を計算するとき，正の値を取っていいですか?

お答え： $\mathbb{R}^3$ のベクトルに「正の値」も「負の値」もありません．$\pm(p_u \times p_v)/|p_u \times p_v|$ のうち「正の符号」をとる，というならわかります．試験を気にする必要はないです．どちらをとっても，そのあとの計算を追跡します.

質問 17： どうして TeX ファイルに打ち込む文字列は有限なのに誤植が無限にあるように感じられるのでしょうか.

お答え： 謎.

5 ガウスの定理

■接成分，法成分（復習）． パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．

(5.1) $$\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \qquad (V_{\mathrm{P}}\ \text{は}\ \mathrm{P}=p(u_0,v_0)\ \text{における曲面の接平面},\ \nu_{\mathrm{P}}=\nu(u_0,v_0))$$

と直和分解できる．ただし $\nu(u,v)$ は p の単位法線ベクトル．したがって任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は

(5.2) $$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \qquad ([\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\in V_{\mathrm{P}}, [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}}\in\mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}})$$

と一通りに分解することができる．

■測地線．

定義 5.1. 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上のパラメータづけられた曲線

$$\hat\gamma(t) = p\circ\gamma(t) = p\bigl(u(t),v(t)\bigr) \qquad \bigl(\gamma(t)=(u(t),v(t))\bigr)$$

が**測地線** geodesic であるとは

$$\Bigl[\ddot{\hat\gamma}(t)\Bigr]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

が成り立つことである．

問 5.2. 曲面上の曲線 $\hat\gamma(t)$ が測地線ならば，その速さ $|\dot{\hat\gamma}(t)|$ は一定であることを確かめなさい．このことから，測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存する．

問 5.3. 曲面 $p(u,v)$ 上の正則曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ が，<u>パラメータを適切に取り替えると</u>測地線になるための必要十分条件は，

$$\hat\nu(t)\cdot\bigl(\ddot{\hat\gamma}(t)\times\dot{\hat\gamma}(t)\bigr)=0 \qquad \bigl(\hat\nu(t)=\nu\bigl(u(t),v(t)\bigr)\bigr)$$

となることである．このことを示しなさい．

問 5.4. 次を示しなさい．

- 平面の測地線は，弧長に比例するパラメータで表した直線である．
- 球面と，その中心を含む平面との共通部分（**大円** a great circle と呼ばれる）は，弧長に比例するパラメータで表示すると測地線になる．

■曲面上の最短線． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上の 2 点 P, Q を結ぶ曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さは次で与えられる：

$$\mathcal{L}(\hat\gamma) := \int_a^b |\dot{\hat\gamma}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

定理 5.5 (テキスト 104 ページ，定理 10.5)**.** 曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ滑らかな曲線のうち，最短のものは適切にパラメータを取り替えれば測地線になる．

2018 年 1 月 11 日 (2018 年 1 月 18 日訂正)

注意 5.6. 定理 5.5 の逆は次の意味で正しくない：(1) 曲面上の 2 点を結ぶ，最短線でない測地線が存在することがある（球面上の，中心に関して対称でない 2 点を考えよ）．(2) 曲面上の 2 点を結ぶ測地線が存在しない場合がある．しかし，曲面上の与えられた点 P に対して，「U 上の 2 点を結ぶ U 内の最短線がただ一つ存在する」ような P の近傍 U をとることができる（凸近傍）．

問 5.7. 平面上の 2 点を結ぶ最短線は，それらの点を端点とする線分であることを確かめなさい．

■ガウスの公式とクリストッフェル記号

定理 5.8 (テキスト 108 ページ，(10.7) 式)**.** パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル ν をとり，第一基本量を E, F, G, 第二基本量を L, M, N と表すとき，

$$p_{uu} = \Gamma^1_{11}p_u + \Gamma^2_{11}p_v + L\nu, \qquad p_{uv} = \Gamma^1_{12}p_u + \Gamma^2_{12}p_v + M\nu, \qquad p_{vv} = \Gamma^1_{22}p_u + \Gamma^2_{22}p_v + N\nu \tag{5.3}$$

が成り立つ．ここで Γ^k_{ij} は**クリストッフェル記号**（テキスト 108 ページ，(10.6) 式で与えられる）である．

注意 5.9. クリストッフェル記号は第一基本量とその偏導関数のみからきまる．

系 5.10 (測地線の方程式，テキスト 109 ページ (10.8))**.** 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\hat\gamma(t) = p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\ddot u + \Gamma^1_{11}\dot u^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot u\dot v + \Gamma^1_{22}\dot v^2 = 0, \qquad \ddot v + \Gamma^2_{11}\dot u^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot u\dot v + \Gamma^2_{22}\dot v^2 = 0$$

が成り立つことである．

■驚異の定理　等式 (5.3) とワインガルテンの公式（テキスト 85 ページ，命題 8.5）を用いて，p_{uuv}, p_{uvu} を p_u, p_v, ν の線型結合で表し，ν の係数を比較すると，**ガウス方程式**（テキスト 123 ページの定理 11.2；驚異の定理）が得られる．これは**ガウス曲率 K を第一基本量で表す式** である．

問 5.11. ガウスの驚異の定理を用いて，正確な地図がつくれない理由を説明しなさい．

問題

5-1 曲面

$$p(u,v) = \bigl(\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v - \tanh v\bigr) \qquad (v > 0)$$

上の曲線 $\hat\gamma(t) = p\circ\gamma(t)$ $(\gamma(t) = (u(t),v(t)))$ が

$$u(t)^2 + \cosh^2 v(t) = a^2 \qquad (a > 1 \text{ は定数})$$

を満たしているならば，パラメータ t を適切にとれば $\hat\gamma(t)$ は測地線となることを示しなさい．

5-2 曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2, \qquad I\!I = 2\sin\theta\,du\,dv$$

と表されているとする．ただし $\theta = \theta(u,v)$ は (u,v) のなめらかな関数で区間 $(0,\pi)$ に値をもつものとする．このとき，ガウスの方程式（テキスト 123 ページ，定理 11.2）を θ とその偏導関数の関係式として具体的に表しなさい．